

# 114 年度縣市學生學習能力檢測

## 數學六年級施測結果報告

---

國立臺中教育大學

National Taichung University of Education

測驗統計與適性學習研究中心

---

中華民國 114 年 12 月



## 目 錄

壹、背景與目的 .....	1
一、背景.....	1
二、目的.....	1
貳、參與縣市與檢測規模 .....	2
參、檢測對象與檢測工具 .....	3
一、檢測對象.....	3
二、檢測工具.....	3
肆、試題分析與教學建議 .....	5
伍、整體學力表現分析 .....	122
一、不同背景變項學生整體學力表現分析.....	122
二、國民小學六年級學生於不同學習重點之答對率表現.....	123
陸、整體教學建議 .....	131
柒、附錄 .....	151



## 壹、背景與目的

### 一、背景

測驗與評量是教育歷程中十分重要的一環，透過學力檢測可協助師生瞭解學生之學習成效與升學進路，及早發現待加強學生並啟動積極性教學介入，教育當局亦能評估施行的相關政策，透過調節教育資源來強化發展教學成效。

107 年開始，桃園市等五縣市以委託形式，由國立臺中教育大學測驗統計與適性學習研究中心協助辦理縣市學生學習能力檢測試題研發暨資料分析工作，108 年起，改以中心自辦學力檢測研發，各縣市依需求參與形式運作，114 年度有基隆市、新北市、桃園市、新竹縣、新竹市、苗栗縣、臺中市、南投縣、雲林縣、嘉義縣、嘉義市、臺南市、高雄市、屏東縣、花蓮縣、澎湖縣以及金門縣等十七縣市共同參與，檢測對象為國民中小學三年級至八年級學生，檢測科目包含國語文、數學和英語文。

此份報告係根據檢測分析結果撰寫，現場教師可據以瞭解學生於各評量向度之表現情形，進而對學生進行適性適才之教學；教育決策者亦可更精準的將相關資源挹注於需求性相對較高的教育現場，讓教育和教學有效的朝「把每一個孩子帶上來」的方向前進。

### 二、目的

- (一) 測驗專責單位統一研發試題，降低各縣市命題壓力和研發成本。
- (二) 國民小學及國民中學學生學習能力檢測分析結果，協助教師瞭解學生學習概況以及科目內有待加強之內容向度。
- (三) 不同背景變項國民小學及國民中學學生學習能力表現之差異分析，可做為學校輔導或教育政策研擬之參考。

## 貳、參與縣市與檢測規模

本年度縣市學生學習能力檢測於 114 年 5 月 29 日進行，數學六年級施測人數為 36,578 人。各縣市在數學六年級之詳細參與情形如下表 2-1 所示。

表 2-1 114 年度國民小學學生學習能力檢測數學六年級縣市參與人數摘要表

參與縣市	報考學生人數	到考人數	缺考人數
苗栗縣	4,954	4,822	132
南投縣	3,949	3,855	94
嘉義縣	3,158	3,059	99
臺南市	16,358	15,832	526
屏東縣	5,993	5,810	183
花蓮縣	2,606	2,556	50
金門縣	649	644	5
總計	37,667	36,578	1,089

## 參、檢測對象與檢測工具

### 一、檢測對象

114 年參與國立臺中教育大學所承辦「國民小學數學六年級學生學習能力檢測」者為苗栗縣、南投縣、嘉義縣、臺南市、屏東縣、花蓮縣及金門縣等七縣市之國民小學六年級學生(未排除資源班及特殊生)，應考名冊羅列 37,667 人、實際施測人數 36,578 人，其中男生 19,292 人、女生 18,236 人、未填寫性別 139 人，整體缺考率約為 2.9%。

### 二、檢測工具

「國民小學數學六年級學生學習能力檢測」(以下簡稱學力檢測)由國立臺中教育大學測驗統計與適性學習研究中心邀集數學領域專家教授及現職國民小學教師組成命審題團隊。本次學力檢測試題包括「評量指標 - 知識向度」與「評量指標 - 認知向度」等兩個向度。其中，評量指標 - 知識向度包含數與計算、量與實測以及幾何等三個指標；評量指標 - 認知向度包含概念理解、程序執行與解題思考等三個指標。學力檢測施測之正式題本總題數為 25 題，試題評量架構與試題各面向之題數分布如表 3-1 所示。

表 3-1 數學領域六年級正式題本評量指標架構與試題之題數分布

知識向度 \ 認知向度	概念理解	程序執行	解題思考
數與計算	7	2	3
量與實測	1	1	1
空間與形狀	3	1	2
關係	1	2	1

命題團隊為顧及試題分布之均衡性，依概念理解、程序執行與解題思考等三個評量指標 - 認知向度；數與計算、量與實測、空間與形狀、代數以及資料與不確定性五個評量指標 - 知識向度，二個面向進行測驗試題之設計。「**數與計算**」：比率；質因數分解(含認識質數和合數)；最大公因數與最小公倍數；互質及最簡分數；分數的除法；小

數的除法；分數及小數兩步驟問題；比與比值；速率(含單位換算)；基準量與比較量。

「量與實測」：時間的乘除問題；大單位面積、重量(公噸)、體積(立方公尺)；容量、容積和體積的關係。「空間與形狀」：線對稱；正方體和長方體的表面積；放大與縮小；比例尺；圓面積和周長公式。「代數」：數的計算規則；數量關係及數量關係的表示。

「資料與不確定性」：製作折線圖。詳細試題內容於各評量指標之分布題數如表 3-2 所示。

表 3-2 數學領域六年級施測正式題本於評量指標之題數分析

向度	學習重點	題數	題號
數與計算	概念理解 N-6-2、N-6-5、N-6-3、 N-6-1、N-6-2、N-6-7、 N-6-8	7	07、09、10、15、 17、23、24
	程序執行 N-6-6、N-6-4	2	02、04
	解題思考 N-5-10、N-6-5、N-6-7	3	08、19、25
	概念理解 N-5-16	1	14
量與實測	程序執行 N-5-12	1	03
	解題思考 N-5-15	1	20
	概念理解 S-6-3、S-5-4、S-6-3	3	13、16、22
空間與形狀	程序執行 S-6-1	1	18
	解題思考 S-6-1、S-6-2	2	12、21
	概念理解 R-6-1	1	01
關係	程序執行 R-6-4(同 N-6-9)、 R-6-1	2	05、06
	解題思考 R-6-3	1	11



## 肆、試題分析與教學建議

本報告先分析「114 年國民小學數學六年級學生學習能力檢測」結果，再針對各試題提供相關建議，本試卷信度 Cronbach's alpha 值為 0.79，具一致性、穩定性及可靠性。

整份試卷未作答、連續五題以上未作答或答對率低於 0.25，且作答反應中有疑似亂答為無效樣本者予以刪除，資料整理後納入分析之有效樣本數為 36,521 人，其中各科試題分析結果呈現時所涉及的名詞分別定義如表 4-1：

表 4-1 試題分析名詞解釋

試題分析名詞	解釋
高分組	參與測驗有效樣本總分排名前 27%之學生。
低分組	參與測驗有效樣本總分排名後 27%之學生。
選答率	參與測驗有效樣本於此試題選答各選項之比率。
通過率	參與測驗有效樣本之試題答對率。
鑑別度	高分組試題答對率與低分組試題答對率之差。

試題代碼：本次學力檢測試題分析報告中，每道數學題幹均配有一組試題代碼「114-Mn<sub>1</sub>-□n<sub>2</sub>-n<sub>3</sub>」。其中，M 表示「數學科」；n<sub>1</sub> 表示「n<sub>1</sub> 年級」；□表示「知識向度」(A：數與計算；B：量與實測；C：空間與形狀；D：關係)；n<sub>2</sub> 表示「認知向度」(1：概念理解；2：程序執行；3：解題思考)；n<sub>3</sub> 表示「題號」(01 表示第 1 題)。

題號	試題代碼				答案		
1	114-M6-D1-01				3		
學習重點	R-6-1 數的計算規律：小學最後應認識(1)整數、小數、分數都是數，享有一樣的計算規律。(2)整數乘除計算及規律，因分數運算更容易理解。(3)漸體會乘法和除法的計算實為一體。併入其他教學活動。 備註：須理解小數和分數乘除混合計算時，常用的約分規則。在生活解題上，乘法和除法意義不同，但在計算上兩者實為一體，學生因此可提高數學認識之抽象層次。乘法和除法視為一體的好處是計算規律大為簡化。本條目不須另立獨立單元教學。						
知識向度	關係		認知向度		概念理解		
題目	已經知道 $3\frac{7}{9} \times 8\frac{3}{4} + 8\frac{3}{4} \times 6\frac{2}{3} = \square \times (3\frac{7}{9} + 6\frac{2}{3})$ ， 請問 $\square$ 內要填入哪個數？  ① $3\frac{7}{9}$  ② $6\frac{2}{3}$  ③ $8\frac{3}{4}$  ④ $10\frac{4}{9}$						
選答率	選 項	1	2	3*	4	其他	通過率：90%
	全 體	0.03	0.04	0.90	0.03	0.00	
	高分組	0.00	0.00	0.99	0.00	0.00	鑑別度：0.26
	低分組	0.08	0.10	0.73	0.09	0.00	
一、試題分析							
(一) 評量目標							
本題給定有□的分數算式，要求學生選出填入口內能讓等式成立的數字，評量學生利用乘法交換律及乘法對加法分配律解分數計算題的能力。							

## (二) 數據說明

1. 整體通過率 90%，高分組答對率 99%，低分組答對率 73%，鑑別度 0.26。
2. 90%的學生選擇正確答案③；3%的學生選擇①；4%的學生選擇②；3%的學生選擇④。

## (三) 選項及學生表現說明

1. 本題鑑別度為 0.26，正確答案為選項③，通過率為 90%，顯示九成的學生已認識可以將「乘法交換律」及「乘法對加法的分配律」的適用範圍由整數情境擴充至分數和小數情境。
2. 有 3%的學生選擇①（低分組有 8%），這些學生可能不認識可以將「乘法交換律」及「乘法對加法的分配律」的適用範圍由整數情境擴充至分數和小數情境。
3. 有 4%的學生選擇②（低分組有 10%），這些學生可能不認識可以將「乘法交換律」及「乘法對加法的分配律」的適用範圍由整數情境擴充至分數和小數情境。
4. 有 3%的學生選擇④（低分組有 9%），這些學生可能不認識可以將「乘法交換律」及「乘法對加法的分配律」的適用範圍由整數情境擴充至分數和小數情境。

## 二、對應學習重點

	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	R-5-2 四則計算規律（II）： 乘除混合計算。「乘法對加法或減法的分配律」。將計算規律應用於簡化混合計算。熟練整數四則混合計算。 備註：乘除混合：含「連除兩數等於除以兩數之積」；不做 $a \div (b \div c)$ 之去括號。必須呈現以下原則的範例：將應用問題轉化	R-6-1 數的計算規律：小學最後應認識(1)整數、小數、分數都是數，享有一樣的計算規律。(2)整數乘除計算及規律，因分數運算更容易理解。(3)逐漸體會乘法和除法的計算實為一體。併入其他教學活動。 備註：須理解小數和分數乘除混合計算時，常用的約分規則。	N-7-3 負數與數的四則混合運算(含分數、小數)：使用「正、負」表徵生活中的量；相反數；數的四則混合運算。

	成算式後，再利用計算規律調整算式進行計算解題（其中調整後的算式已無法以原情境來解釋）。	在生活解題上，乘法和除法意義不同，但在計算上兩者實為一體，學生因此可提高數學認識之抽象層次。乘法和除法視為一體的好處是計算規律大為簡化。本條目不須另立獨立單元教學。	
--	---	--	--

### 三、教學建議

#### (一) 錯誤類型的可能原因

1. 學生可能不知道整數、小數、分數都是數，享有一樣的計算規律。
2. 學生可能無法將「乘法交換律」及「乘法對加法的分配律」的適用範圍由整數情境擴充至分數和小數情境。

#### (二) 核心概念與本題的教學重點

1. 國小一年級引入加法交換律（數相加的順序不影響其和）。  
 國小二年級引入加法結合律（三數相加，順序改變不影響其和）。  
 國小二年級引入乘法交換律（兩數相乘的順序不影響其積）。  
 國小四年級引入乘法結合律（三數相乘，順序改變不影響其積）。  
 國小五年級引入乘法對加法的分配律。  
 但是，只在整數情境討論上面這五個運算性質，本學習內容幫助學生理解這些性質在分數及小數情境中也會成立。

2. 以加法結合律為例，可以透過計算出答案的方式，幫助學生認識

$(a + b) + c = a + (b + c)$ ，例如算出  $(\frac{1}{5} + \frac{4}{7}) + \frac{2}{3} = \frac{27}{35} + \frac{2}{3} = \frac{151}{105}$ ，算出

$\frac{1}{5} + (\frac{4}{7} + \frac{2}{3}) = \frac{1}{5} + \frac{26}{21} = \frac{151}{105}$ ，就能得到  $(\frac{1}{5} + \frac{4}{7}) + \frac{2}{3} = \frac{1}{5} + (\frac{4}{7} + \frac{2}{3})$ 。

但是在未知數情境中無法算出  $a + b$  和  $b + c$  的值，無法幫助學生透過算出答案認識  $(a + b) + c = a + (b + c)$ 。因此學生在國小階段必須預期  $a$ 、 $b$  和  $c$  是整數、分

數或小數時， $(a + b) + c = a + (b + c)$  一定會成立，才能為國中階段理解  $(a + b) + c = a + (b + c)$  的意義來鋪路。

3. 學生較能掌握加法交換律、加法結合律、乘法交換律、乘法結合律的意義，較無法掌握乘法對加法分配律的意義。而乘法對加法的分配律是國中乘法公式和因式分解的先備知識。教師應多舉一些生活情境的例子，幫助學生認識  $a$ 、 $b$  和  $c$  是整數、分數或小數時， $(a + b) \times c = a \times c + b \times c$  及  $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$  一定會成立，才能為國中階段理解  $(a + b) \times c = a \times c + b \times c$  及  $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$  的意義來鋪路。

題號	試題代碼				答案															
2	114-M6-A2-02				3															
學習重點	N-6-6 比與比值：異類量的比與同類量的比之比值的意義。理解相等的比中牽涉到的兩種倍數關係（比例思考的基礎）。解決比的應用問題。 備註：比中各數原則上為整數，但也可包含簡單之小數與分數。																			
知識向度	數與計算		認知向度		程序執行															
題目	<p>下表是 5 人份蛋黃酥的食材和重量表。</p> <table><tr><th colspan="2">5 人份蛋黃酥</th></tr><tr><th>食材</th><th>重量</th></tr><tr><td>蛋黃</td><td>適量</td></tr><tr><td>高筋麵粉</td><td>500 公克</td></tr><tr><td>糖</td><td>150 公克</td></tr><tr><td>紅豆餡</td><td>175 公克</td></tr><tr><td>低筋麵粉</td><td>500 公克</td></tr></table> <p>依此配方製作出 2 人份的蛋黃酥，請問紅豆餡需要多少公克？</p> <p>① 35 ② 60 ③ 70 ④ 350</p>						5 人份蛋黃酥		食材	重量	蛋黃	適量	高筋麵粉	500 公克	糖	150 公克	紅豆餡	175 公克	低筋麵粉	500 公克
5 人份蛋黃酥																				
食材	重量																			
蛋黃	適量																			
高筋麵粉	500 公克																			
糖	150 公克																			
紅豆餡	175 公克																			
低筋麵粉	500 公克																			
選答率	選 項	1	2	3*	4	其他														
	全 體	0.09	0.06	0.73	0.12	0.00														
	高分組	0.02	0.01	0.94	0.03	0.00														
	低分組	0.18	0.14	0.44	0.24	0.00														
通過率：73%						鑑別度：0.5														
一、試題分析																				
(一) 評量目標																				
本題給定 5 人份的蛋黃酥食材和重量表，要求學生選出 2 人份的紅豆餡重量，評量學生利用比或比值解題的能力。																				

## (二) 數據說明

1. 整體通過率 73%，高分組答對率 94%，低分組答對率 44%，鑑別度 0.50。
2. 73%的學生選擇正確答案③；9%的學生選擇①；6%的學生選擇②；12%的學生選擇④。

## (三) 選項及學生表現說明

1. 本題鑑別度為 0.5，正確答案為選項③，通過率為 73%，顯示超過七成的學生已具備利用比或比值解題的能力。
2. 有 9%的學生選擇①（低分組有 18%），這些學生可能不具備利用比和比值解題的能力；也可能已具備利用比和比值解題的能力，但是誤解題意，只算出 1 人份所需的紅豆餡重量。
3. 有 6%的學生選擇②（低分組有 14%），這些學生可能不具備利用比和比值解題的能力；也可能不理解題意。
4. 有 12%的學生選擇④（低分組有 24%），這些學生可能不具備利用比和比值解題的能力；也可能誤解題意，算出 10 人份的所需的紅豆餡重量。

## 二、對應學習重點

	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	<b>N-5-10</b> 解題：比率與應用。整數相除的應用。含「百分率」、「折」、「成」。 備註：本條目限結果不大於 1 (100%) 的應用情境 (大於 1 之延伸情境見 N-6-8)。	<b>N-6-6</b> 比與比值：異類量的比與同類量的比之比值的意義。理解相等的比中牽涉到的兩種倍數關係 (比例思考的基礎)。解決比的應用問題。 備註：比中各數原則上為整數，但也可包含簡單之小數與分數。	<b>N-7-9</b> 比與比例式：比；比例式；正比；反比；相關之基本運算與應用問題，教學情境應以有意義之比值為例。 備註：不涉及使用繁分數，遇到兩分數之比時，以分數相除處理之。

### 三、教學建議

#### (一) 錯誤類型的可能原因

1. 學生可能不具備利用比和比值解題的能力。
2. 學生可能無法報讀 5 人份的蛋黃酥食材和重量表。
3. 學生可能不理解或誤解題意。

#### (二) 核心概念與本題的教學重點

1. 本學習內容五年級引入比率，六年級引入比值，比率和比值都是描述兩量間的關係，差別是討論的情境不相同。

比率討論的情境是部分及全體的關係，學生比較容易接受將全體視為基準量 1，例如：全班 30 人，男生有 18 人，將全班的人數看成 1 時，男生的人數佔全班的  $\frac{3}{5}$  (或 60%)；比值討論的情境是兩量 (基準量及比較量) 間的關係，學生比較不容易將其中任意的一量視為基準量 1，例如：甲的體重是 18 公斤，乙的體重

是 30 公斤，將甲的體重視為基準量 1 時，乙的體重是甲的  $\frac{5}{3}$  倍。

2. 比率問題包含「比率未知」、「部分量未知」及「全部量未知」三類問題。

因為「全部量未知」的問題涉及除數是分數的除法計算，因此五年級只處理「比率未知」及「部分量未知」的問題，六年級學過除數是分數的除法問題後再處理「全部量未知」的問題。

下面以「全班有 25 人，女生有 10 人」為例，說明這三類問題的題型：

- (1) 比率未知問題：全班有 25 人，女生有 10 人，女生佔全班的幾分之幾？

- (2) 部分量未知問題：全班有 25 人，女生佔全班的  $\frac{2}{5}$ ，女生有多少人？

- (3) 全部量未知問題：女生有 10 人，佔全班的  $\frac{2}{5}$ ，全班有多少人？

3. 以 3 : 5 和 5 : 8 為例，有兩種比較比的大小的方法

第一種：讓兩個比的前項相等， $3 : 5 = \underline{15} : 25$ ， $5 : 8 = \underline{15} : 24$

$25 > 24$ ， $\underline{15} : 25 > \underline{15} : 24$ ，可以得到  $3 : 5 > 5 : 8$ 。



第二種：讓兩個比的後項相等， $3:5=24:\underline{40}$ ， $5:8=25:\underline{40}$ ，

$24 < 25$ ， $24:\underline{40} < 25:\underline{40}$ ，可以得到  $3:5 < 5:8$ 。

由上面的說明可以知道，前項相同和後項相同時，兩個比的大小剛好相反，為了讓兩個比大小的答案一致，數學上約定比的後項為基準量，透過後項相同時前項的大小，來比較兩個比的大小。

4. 以「3 個糖果賣 5 元」和「5 個餅乾賣 8 元」為例，有兩種比較糖果和餅乾，誰的售價比較貴或比較便宜的方法。

方法一：將總價放在後項，總價相同時，比較誰的個數比較多

3 個糖果賣 5 元  $\Rightarrow 3:5=24:\underline{40} \Rightarrow 24$  個糖果賣 40 元

5 個餅乾賣 8 元  $\Rightarrow 5:8=25:\underline{40} \Rightarrow 25$  個餅乾賣 40 元

40 元可以買 24 個糖果，40 元也可以買 25 個餅乾，

$24 < 25$ ，所以糖果的售價比較貴。

方法二：將個數放在後項，個數相同時，比較誰的總價比較多

5 元買 3 個糖果  $\Rightarrow 5:3=25:\underline{15} \Rightarrow 25$  元買 15 個糖果

8 元買 5 個餅乾  $\Rightarrow 8:5=24:\underline{15} \Rightarrow 24$  元買 15 個餅乾

25 元可以買 15 個糖果，24 元也可以買 15 個餅乾，

$25 > 24$ ，所以糖果的售價比較貴。

方法一是把總價 40 元當做後項，前項糖果的個數 24 比餅乾的個數 25 小，但是糖果的售價比餅乾的售價貴。

方法二是把個數 15 個當做後項，前項糖果的總價 25 比餅乾的總價 24 大，而糖果的售價比餅乾的售價貴。

為了讓數字比較大時售價比較貴，數字比較小時售價比較便宜，數學上選擇方法二為售價的定義。

5. 為了讓比較多個比的大小時更有效率，可以透過將後項轉換成 1 的方式來比較，

$5:3=\frac{5}{3}:1$ ， $8:5=\frac{8}{5}:1$ ， $\frac{5}{3} > \frac{8}{5}$ ，可以得到  $5:3 > 8:5$ 。

以「 $5:3=\frac{5}{3}:1$ 」為例，數學上稱後項為 1 的前項  $\frac{5}{3}$  為 5:3 的比值，可以透過比值來比較兩個比的大小。

6. 有兩種定義比值的方式：

$$\text{第一種：} a : b = \frac{a}{b} : 1 = \frac{a}{b}$$

$$\text{第二種：} a : b = a \div b = \frac{a}{b}$$

部分教師不喜歡上面的定義方式，認為等號左邊是比，而等號右邊是數字，比和

數字不相等，因此不能記成  $a : b = \frac{a}{b}$ ，只能說  $a : b$  的比值是  $\frac{a}{b}$ 。建議教師透過下列方式引入比值的定義：

$a : b = \frac{a}{b} : 1$ ，我們稱  $\frac{a}{b} : 1$  的前項  $\frac{a}{b}$  為  $a : b$  的比值，可以利用  $a \div b = \frac{a}{b}$  算出比值。

7. 比有前、後項單位相同的比，和前、後項單位不同的比兩種類型，習慣上單位相同的比都省略單位，單位不同的比都要紀錄單位。

以比例尺為例，使用  $1 : 100000$  溝通比例尺時，表示地圖上長 1 公分，實際的長是 100000 公分；地圖上長 1 公尺，實際的長是 100000 公尺。使用 1 公分：1 公里或下面的圖溝通比例尺時，表示地圖上長 1 公分，

實際的長是 1 公里



8. 同單位比的問題包含組合問題和母子問題：

組合問題：親子遊戲中，3 個小孩需要 2 個大人來協助，15 個小孩需要幾個大人來協助？

母子問題：1 打襯衫有 12 件，1 打襯衫中，其中 4 件是藍色的，如果要包裝 6 打襯衫，需要幾件藍襯衫？

不同單位比的問題包含交換問題和密度問題：

交換問題  $\Rightarrow$  5 元可以買 3 個水蜜桃，幾元可以買 6 個水蜜桃？

密度問題  $\Rightarrow$  10 公尺長的鐵絲重 6 公斤，50 公尺長的鐵絲重幾公斤？

9. 以「3 枝鉛筆賣 5 元，9 枝鉛筆賣幾元？」為例，提出四種解題策略，教師可以提供學生利用這四種解題策略解題的經驗，但不宜限制學生使用某種解題策略來解題。

(1) 單價法：先用除法「 $5 \div 3 = \frac{5}{3}$ 」算出 1 枝鉛筆的單價是  $\frac{5}{3}$  元，再利用乘法

$$\frac{5}{3} \times 9 = \frac{45}{3} = 15$$

算出 9 枝鉛筆賣 15 元的答案。

(2) 倍數法：先用除法「 $9 \div 3 = 3$ 」算出 9 枝鉛筆是 3 枝鉛筆的 3 倍，再用乘法「 $5 \times 3 = 15$ 」算出 5 元的 3 倍是 15 元，得到 9 枝鉛筆賣 15 元的答案。

(3) 關係式：教師也可以先用比的算式「 $3 : 5 = 9 : \square$ 」記錄問題，再將比的算式由左右並置的記法，改記成上下並置的關係式記法，關係式的記法較容易說明單價法或倍數法解題的意義。

$$\text{單價法：} 5 \div 3 = \frac{5}{3}, \frac{5}{3} \times 9 = 15$$

$\begin{array}{r} 3 \\ \div 3 \downarrow \\ 1 \\ \times 9 \downarrow \\ 9 \text{ 枝} \end{array}$	$\longleftrightarrow$	$\begin{array}{r} 5 \\ \div 3 \downarrow \\ ? \text{ 元} \\ \times 9 \downarrow \\ \square \text{ 元} \end{array}$
--	-----------------------	--

$$\text{倍數法：} 3 \times 3 = 9 \text{ (或 } 9 \div 3 = 3 \text{)}, 5 \times 3 = 15$$

$\begin{array}{r} 3 \text{ 枝} \\ \times 3 \downarrow \\ 9 \text{ 枝} \end{array}$	$\longleftrightarrow$	$\begin{array}{r} 5 \text{ 元} \\ \times 3 \downarrow \\ \square \text{ 元} \end{array}$
--	-----------------------	--

10. 以「 $3 : 5 = \square : 15$ 」為例，說明為什麼外項乘以外項會等於內項乘以內項。

$$3 : 5 = \square : 15$$

$$\Rightarrow (3 \times 15) : (5 \times 15) = (\square \times 5) : (15 \times 5)$$

$$\Rightarrow (3 \times 15) = (\square \times 5)$$

看著原問題「 $3 : 5 = \square : 15$ 」和推出的結果「 $3 \times 15 = \square \times 5$ 」，

幫助學生發現「 $3 \times 15$ 」是「 $3 : 5 = \square : 15$ 」兩外項的乘積，

「 $\square \times 5$ 」是「 $3 : 5 = \square : 15$ 」兩內項的乘積，

可以透過「外項乘以外項會等於內項乘以內項」的關係，

由「 $3 : 5 = \square : 15$ 」直接得到  $3 \times 15 = \square \times 5$ 。

11. 以相同口味的紅茶牛奶為例，說明最簡單整數比的意義。

紅茶	牛奶
200 公升：	120 公升
100 公升：	60 公升
50 公升：	30 公升
10 公升：	6 公升
5 公升：	3 公升

步驟一：說明上面的比都是相等的比，調出的紅茶牛奶口味都相同。

步驟二：溝通比較簡單比的意義

「 $100 : 60$ 」和「 $200 : 120$ 」前後項的數字都是整數，「 $100 : 60$ 」的數字都比「 $200 : 120$ 」的數字簡單，稱「 $100 : 60$ 」是比「 $200 : 120$ 」簡單的整數比。「 $5 : 3$ 」的數字都比「 $10 : 6$ 」的數字簡單，稱「 $5 : 3$ 」是比「 $10 : 6$ 」簡單的整數比。

步驟三：引入最簡單整數比的記法，5 和 3 互質，找不到比  $5 : 3$  更簡單的整數比，數學上稱  $5 : 3$  為最簡單整數比。

步驟四：說明最簡單整數比的意義， $5 : 3$  是上面這些相同口味紅茶牛奶的調配方法，這些紅茶牛奶都可以利用紅茶 5 份和牛奶 3 份的方式調出。

12. 很多人都認為棒球比數  $5 : 3$  不是比，因為它只是一場比賽的記錄，下一場比賽不一定還是  $5 : 3$ 。兩量並置的關係都是比，棒球比數  $5 : 3$  記錄了比賽結束時兩隊的得分數，因此它是一個比，只是這個比是一個特例。

多數成人心中的比指的是最簡單整數比，最簡單整數比是一個集合。

例如超級市場大拍賣，3 個蘋果賣 50 元，此時的「3 個：50 元」是最簡單整數比，指的是每 3 個蘋果賣 50 元，可以得到 6 個蘋果賣 100 元，12 個蘋果賣 200 元等。

又如比賽分組，3 個男生和 2 個女生分成一組，此時的「3 : 2」也是最簡單整數比，指的是每組都有 3 個男生和 2 個女生，可以得到 2 組有 6 個男生和 4 個女生，5 組有 15 個男生和 10 個女生等。

題號	試題代碼				答案		
3	114-M6-B2-03				3		
學習重點	N-5-12 面積：「公畝」、「公頃」、「平方公里」。生活實例之應用。含與「平方公尺」的換算與計算。使用概數。 備註：針對量的大單位教學，教師應運用學生熟悉的生活示例，體會各單位的量感。						
知識向度	量與實測		認知向度		程序執行		
題目	蘋果園的面積是 15 公頃 8 公畝，芒果園的面積是 123 公畝。 蘋果園的面積比芒果園的面積大多少公頃多少公畝？  ① 14 公頃 885 公畝 ② 13 公頃 885 公畝 ③ 13 公頃 85 公畝 ④ 3 公頃 5 公畝						
選答率	選 項	1	2	3*	4	其他	通過率：44%
	全 體	0.24	0.13	0.44	0.19	0.00	
	高分組	0.15	0.05	0.70	0.09	0.00	鑑別度：0.47
	低分組	0.27	0.23	0.23	0.26	0.00	
一、試題分析							
(一) 評量目標							
本題給定「幾公頃幾公畝」及「幾公畝」，要求學生算出相差「多少公頃多少公畝」，評量學生公畝、公頃單位複名數加減計算及化聚的能力。							
(二) 數據說明							
1. 整體通過率 44%，高分組答對率 70%，低分組答對率 23%，鑑別度 0.47。							
2. 44%的學生選擇正確答案③；24%的學生選擇①；13%的學生選擇②；19%的學生選擇④。							

### (三) 選項及學生表現說明

1. 本題鑑別度為 0.47，正確答案為選項③，通過率為 44%，顯示超過四成的學生已具備公畝、公頃單位複名數加減計算及化聚的能力。
2. 有 24%的學生選擇①（低分組有 27%），這些學生可能尚未具備公畝、公頃單位複名數加減計算及化聚的能力，誤以為 1 公頃=1000 公畝。
3. 有 13%的學生選擇②（低分組有 23%），這些學生可能尚未具備公畝、公頃單位複名數加減計算及化聚的能力，誤以為 1 公頃=1000 公畝，得到 13 公頃 885 公畝的答案。
4. 有 19%的學生選擇④（低分組有 26%），這些學生可能尚未具備公畝、公頃單位複名數加減計算及化聚的能力，誤以為 1 公頃=10 公畝，123 公畝=12 公頃 3 公畝，15 公頃 8 公畝 - 12 公頃 3 公畝=3 公頃 5 公畝，得到 3 公頃 5 公畝的答案。

### 二、對應學習重點

	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	N-4-11 面積：「平方公尺」。實測、量感、估測與計算。 備註：基於N-4-2，本條目不做「平方公分」換到「平方公尺」的問題。不用複名數進行計算。	N-5-12 面積：「公畝」、「公頃」、「平方公里」。生活實例之應用。含與「平方公尺」的換算與計算。使用概數。 備註：針對量的大單位教學，教師應運用學生熟悉的生活示例，體會各單位的量感。	S-5-2 三角形與四邊形的面積：操作活動與推理。利用切割重組，建立面積公式，並能應用。 備註：計算面積的問題，若採用分數或小數之邊長與高，必須在分數和小數的乘法後教學( N-5-5、N-5-8 )。

### 三、教學建議

#### (一) 錯誤類型的可能原因

1. 學生可能尚未具備公畝、公頃化聚的能力，誤以為 1 公頃=1000 公畝或 1 公頃=10 公畝。
2. 學生可能尚未具備公畝、公頃單位複名數加減計算的能力。

#### (二) 核心概念與本題的教學重點

1. 二位數加減二位數的加減問題，與相鄰二階單位的時間、長度、重量、容量等加減問題，它們的運算方式都相同，例如：「 $38 + 25$ 」、「3 小時 40 分鐘 + 2 小時 50 分鐘」、「3 公尺 5 公分 + 5 公尺 98 公分」、「3 公斤 460 公克 + 5 公斤 860 公克」、「13 公升 780 毫公升 + 23 公升 380 毫公升」等加法運算都相同。

二位數的加法是逢十進一（10 個①聚成 1 個⑩）。

時間的加法是逢六十進一（60 個 1 分鐘聚成 1 小時）。

長度的加法是逢一百進一（100 個 1 公分聚成 1 公尺）。

重量及容量的加法都是逢一千進一（1000 個 1 公克或毫公升聚成 1 公斤或 1 公升）。

教師可以幫助學生發現它們之間運算相同的關係，將長度、容量、重量的複名數加減視為相同的解題方式。

2. 以「阿草農場種植草莓的面積是 12 公頃 9 公畝，種植番茄的面積是 6 公頃 93 公畝，請問種植草莓和種植番茄的面積共有多少公頃公畝？」為例，建議教師透過下列步驟幫助學生解題：

步驟一：先複習面積單位的化聚關係

$$1 \text{ 公頃} = 100 \text{ 公畝}, 1 \text{ 公畝} = 100 \text{ 平方公尺}$$

步驟二：溝通利用面積複名數加、減、乘法直式算則解題時，最後答案的公畝數字不能比 100 大。



步驟三：利用直式算出答案 19 公頃 2 公畝。

	公頃	公畝	
	12	9	
+	6	93	
	18	102	➡公畝的數字不能比 100 大
+	1	2	➡102 公畝聚成 1 公頃 2 公畝
	19	2	➡答案是 19 公頃 2 公畝

### 3. 理解公畝、公頃及平方公尺的關係

平方公分、平方公尺、平方公里都是二次方描述的面積單位，平方公里單位的引入，和平方公分及平方公尺單位引入的方式相同（見下圖），都是透過邊長是單位長度的正方形引入單位面積。

正方形的邊長	1 公分	1 公尺	1 公里
正方形的面積	1 平方公分	1 平方公尺	1 平方公里

公頃和公畝都是一次方描述的面積單位，建議教師透過邊長（見下圖）來命名公畝和公頃，不宜透過面積來命名公畝和公頃。

正方形的邊長	1 公尺	10 公尺	100 公尺	1000 公尺
正方形的面積	1 平方公尺	1 公畝	1 公頃	1 平方公里

透過邊長命名：邊長 10 公尺正方形的面積為 1 公畝，邊長 100 公尺正方形的面積為 1 公頃。命名後再分別算出邊長 10 公尺正方形的面積為 100 平方公尺，邊長 100 公尺正方形的面積為 10000 平方公尺。再說明 100 平方公尺為 1 公畝，10000 平方公尺為 1 公頃。

題號	試題代碼					答案
4	114-M6-A2-04					4
學習重點	N-6-4 小數的除法：整數除以小數、小數除以小數的意義。直式計算。教師用位值的概念說明直式計算的合理性。處理商一定比被除數小的錯誤類型。 備註：可不處理餘數問題，若要處理，限於具體合理的生活情境，商限定為整數並小心在直式計算中處理餘數問題。餘數問題不評量。					
知識向度	數與計算		認知向度		程序執行	
題目	爸爸到加油站加了 32.8 公升的 95 無鉛汽油，花了 1025 元。 請問當天 1 公升 95 無鉛汽油的售價是多少元？  ① 0.032 ② 3.04 ③ 30.4 ④ 31.25					
選答率	選 項	1	2	3	4*	其他
	全 體	0.10	0.10	0.11	0.69	0.00
	高分組	0.04	0.01	0.02	0.93	0.00
	低分組	0.16	0.24	0.23	0.36	0.01
通過率：69%						
鑑別度：0.56						

一、試題分析

(一) 評量目標

本題給定加油的公升數及金額，要求學生算出 1 公升的售價，評量學生利用小數除法直式計算解題的能力。

(二) 數據說明

1. 整體通過率 69%，高分組答對率 93%，低分組答對率 36%，鑑別度 0.56。

2. 69%的學生選擇正確答案④；10%的學生選擇①；10%的學生選擇②；11%的學生選擇③。

(三) 選項及學生表現說明

1. 本題鑑別度為 0.56，正確答案為選項④，通過率為 69%，顯示近七成的學生已具備利用小數除法直式計算解題的能力。

2. 有 10% 的學生選擇①（低分組有 16%），這些學生可能不具備利用小數除法直式計算解題的能力；這些學生也可能已具備利用小數除法直式計算解題的能力，但是誤解題意，使用 32.8 公升除以 1025 元來解題。
3. 有 10% 的學生選擇②（低分組有 24%），這些學生可能不具備利用小數除法直式計算解題的能力。
4. 有 11% 的學生選擇③（低分組有 23%），這些學生可能不具備利用小數除法直式計算解題的能力。

## 二、對應學習重點

	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	<p>N-5-9 整數、小數除以整數（商為小數）：整數除以整數（商為小數）、小數除以整數的意義。教師用位值的概念說明直式計算的合理性。能用概數協助處理除不盡的情況。熟悉分母為 2、4、5、8 之真分數所對應的小數。</p> <p>備註：原則上只處理商限三位小數的情況。可讓學生從計算中發現可能有除不盡的循環現象，教師以概數處理這類問題（N-5-11），不處理「循環小數」的命名與課題。</p>	<p>N-6-4 小數的除法：整數除以小數、小數除以小數的意義。直式計算。教師用位值的概念說明直式計算的合理性。處理商一定比被除數小的錯誤類型。</p> <p>備註：可不處理餘數問題，若要處理，限於具體合理的生活情境，商限定為整數，並小心在直式計算中處理餘數問題。餘數問題不評量。</p>	<p>N-7-3 負數與數的四則混合運算（含分數、小數）：使用「正、負」表徵生活中的量；相反數；數的四則混合運算。</p>

### 三、教學建議

#### (一) 錯誤類型的可能原因

1. 學生可能不具備利用小數除法直式計算解題的能力。
2. 學生可能不理解或誤解題意。

#### (二) 核心概念與本題的教學重點

1. 學生要先明白：要求每公升的油價是多少元？那麼就需要用總價錢除以公升數。知道哪個數除以哪個數後，再進行小數除法直式計算的運算。
2. 整數除以小數或是小數除以小數的除法，皆是透過將被除數和除數同時換單位的策略解題，且要讓學生看到，同時換單位後，其商數是不變的，這個需透過一些例子讓學生看到現象，或是利用整數題目讓學生理解，再進入小數除法問題。
3. 以整數題目為例，說明「被除數和除數同時換單位」解題策略的意義，或是以「被除數和除數同時變大（或縮小）10 倍、100 倍等」來理解商不變的意義。

##### (1) $12000 \div 3000 = 4$

$1200 \div 300 = 4$ ....同時縮小 10 倍，想成 1200 個 10  $\div$  300 個 10，結果一樣。

$120 \div 30 = 4$ ....同時縮小 100 倍，想成 120 個 100  $\div$  30 個 100，結果一樣。

$12 \div 3 = 4$ ....同時縮小 1000 倍，想成 12 個 1000  $\div$  3 個 1000，結果一樣。

##### (2) 讓學生判斷 $100 \div 50$ 、 $1000 \div 500$ 、 $10000 \div 5000$ 、 $10 \div 5$ 算出的答案是否一樣，各算式之間有什麼變化？

#### 4. 當學生理解後，可以進入小數的除法問題探究，是否也能和整數除法一致。

##### (1) $12 \div 0.5 = ?$ 可以將其轉化為整數來運算嗎？需要怎麼做？可以有兩種思維：


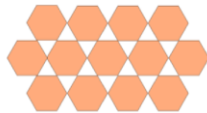
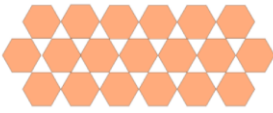
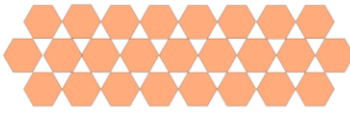
a. 同時換單位  $\rightarrow 12 \div 0.5$  轉成 120 個 0.1 除以 5 個 0.1，即為  $120 \div 5$  求出答案。

b. 同時放大 10 倍變成整數乘法  $\rightarrow 12 \div 0.5$  轉化成  $\rightarrow 120 \div 5$

##### (2) $12.8 \div 0.15 = ?$ 可以將其轉化為整數來運算嗎？需要怎麼做？可以有兩種思維：

a. 同時換單位  $\rightarrow 12.8 \div 0.15 =$  轉成 1280 個 0.01 除以 15 個 0.01，即為  $1280 \div 15$  即可求出答案。



題號	試題代碼				答案		
5	114-M6-D2-05				2		
學習重點	R-6-4 ( 同 N-6-9 ) 解題：由問題中的數量關係，列出恰當的算式解題。可包含 ( 1 ) 較複雜的模式 ( 如座位排列模式 ) ； ( 2 ) 較複雜的計數：乘法原理、加法原理或其混合 ； ( 3 ) 較複雜之情境：如年齡問題、流水問題、和差問題、雞兔問題。連結 R-6-2、R-6-3。  備註：複雜解題旨在思考，不要求步驟的併式。其他見 N-6-9 備註。						
知識向度	關係		認知向度		程序執行		
題目	<p>用相同大小的正六邊形按照下面的方式排圖形。</p> <div>   </div> <p>【圖一】          【圖二】          【圖三】          【圖四】</p> <p>請問第 29 個圖會用到幾個正六邊形？</p> <p>① 174 ② 175 ③ 181 ④ 187</p>						
選答率	選 項	1	2*	3	4	其他	通過率：51%
	全 體	0.25	0.51	0.17	0.07	0.00	
	高分組	0.08	0.82	0.09	0.01	0.00	鑑別度：0.57
	低分組	0.39	0.25	0.21	0.15	0.01	
一、試題分析							
(一) 評量目標							
本題給定由正六邊形規律排列的前 4 個圖形，要求學生推算出第 29 個圖形中正六邊形的個數，評量學生是否具備由問題中的數量關係列出恰當算式解題的能力。							
(二) 數據說明							
1. 整體通過率 51%，高分組答對率 82%，低分組答對率 25%，鑑別度 0.57。							

2. 51%的學生選擇正確答案②；25%的學生選擇①；17%的學生選擇③；7%的學生選擇④。

### (三) 選項及學生表現說明

1. 本題鑑別度為 0.57，正確答案為選項②，通過率為 51%，顯超過五成的學生已具備由問題中的數量關係列出恰當算式解題的能力。
2. 有 25%的學生選擇①（低分組有 39%），這些學生可能尚未具備由問題中的數量關係列出恰當算式解題的能力。
3. 有 17%的學生選擇③（低分組有 21%），這些學生可能尚未具備由問題中的數量關係列出恰當算式解題的能力，誤用  $7+6\times 29=181$  解題。
4. 有 7%的學生選擇④（低分組有 15%），這些學生可能尚未具備由問題中的數量關係列出恰當算式解題的能力，誤用  $7+6\times 30=187$  解題。

## 二、對應學習重點

	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	<p>R-4-4 數量模式與推理（II）：以操作活動為主。二維變化模式之觀察與推理，如二維數字圖之推理。奇數與偶數，及其加、減、乘模式。</p> <p>備註：含學生之簡單推理與說明。如百數表模式、月曆模式之數字模式等。不可出現公式，此非本條目之學習目標。</p>	<p>R-6-4（同 N-6-9） 解題：由問題中的數量關係，列出恰當的算式解題。可包含（1）較複雜的模式（如座位排列模式）；（2）較複雜的計數：乘法原理、加法原理或其混合；（3）較複雜之情境：如年齡問題、流水問題、和差問題、雞兔問題。連結 R-6-2、R-6-3。</p> <p>備註：複雜解題旨在思考，不要求步驟的併式。其他見 N-6-9 備註。</p>	<p>A-7-2 一元一次方程式的意義：一元一次方程式及其解的意義；具體情境中列出一元一次方程式。</p>

### 三、教學建議

#### (一) 錯誤類型的可能原因

1. 學生可能尚未具備由問題中的數量關係列出恰當算式解題的能力。

#### (二) 核心概念與本題的教學重點

建議教師透過下列方式幫助學生解題：

步驟一：教師可以先要求學生列出圖 1 到圖 4 中正六邊形的個數，例如圖 1 中有 7 個正六邊形，圖 2 中有 13 個正六邊形，圖 3 中有 19 個正六邊形，圖 4 中有 25 個正六邊形，接著要求學生說明這些數字有什麼規律。

學生應該可以看到後一項的數字都比前一項的數字多 6。

步驟二：教師可以要求學生找出圖 5 或圖 6 中正六邊形的個數，學生應該有能力透過  $25 + 6 = 31$ ， $31 + 6 = 37$ ，找到圖 5 中正六邊形的個數是 31 個，圖 6 中正六邊形的個數是 37 個。

步驟三：教師可以要求學生找出圖 29 或圖 100 中正六邊形的個數，學生應該可以察覺要加太多次的 6 太麻煩，對解題沒有幫助。

步驟四：教師可以提示學生，圖 1 有 7 個正六邊形，圖 2 比圖 1 多 6 個正六邊形，也就是多 1 個 6，圖 3 比圖 1 多 12 個正六邊形，也就是多 2 個 6，……，幫助學生將注意力放在圖幾和多幾個 6 上面。

步驟五：幫助學生列出下面的算式

$$\text{圖 1} \Rightarrow 7 \text{ 個}$$

$$\text{圖 2} \Rightarrow 7 + 6 \times 1 \text{ 個}$$

$$\text{圖 3} \Rightarrow 7 + 6 \times 2 \text{ 個}$$

$$\text{圖 4} \Rightarrow 7 + 6 \times 3 \text{ 個}$$

步驟六：學生應該能察覺變化的關係，推導出

$$\text{圖 5} \Rightarrow 7 + 6 \times 4 \text{ 個}$$

$$\text{圖 6} \Rightarrow 7 + 6 \times 5 \text{ 個}$$

……

$$\text{圖 29} \Rightarrow 7 + 6 \times 28 \text{ 個}$$



題號	試題代碼				答案		
6	114-M6-D2-06				2		
學習重點	R-6-1 數的計算規律：小學最後應認識 ( 1 ) 整數、小數、分數都是數，享有一樣的計算規律。( 2 ) 整數乘除計算及規律，因分數運算更容易理解。 ( 3 ) 逐漸體會乘法和除法的計算實為一體。併入其他教學活動。 備註：須理解小數和分數乘除混合計算時，常用的約分規則。在生活解題上，乘法和除法意義不同，但在計算上兩者實為一體，學生因此可提高數學認識之抽象層次。乘法和除法視為一體的好處是計算規律大為簡化。本條目不須另立獨立單元教學。						
知識向度	關係		認知向度		程序執行		
題目	下列哪個等式 <u>不成立</u> ？  ① $234 \div 7 \div 11 = 234 \times \frac{1}{7} \times \frac{1}{11}$ ② $234 \div 7 \times 11 = 234 \times \frac{7}{11}$ ③ $124.8 \times 0.125 \div 5 = 124.8 \times \frac{1}{8} \times \frac{1}{5}$ ④ $124.8 \times 0.125 \times 5 = 124.8 \times \frac{5}{8}$						
選答率	選 項	1	2*	3	4	其他	通過率：63%
	全 體	0.10	0.63	0.10	0.17	0.00	
	高分組	0.02	0.88	0.02	0.09	0.00	鑑別度：0.53
	低分組	0.20	0.35	0.21	0.23	0.00	
一、試題分析							
(一) 評量目標							
本題給定四個分、小數的算式，要求學生選出不成立的算式，評量學生透過顛倒相乘將除法改用乘法來計算及將小數轉換成分數的能力。							

## (二) 數據說明

1. 整體通過率 63%，高分組答對率 88%，低分組答對率 35%，鑑別度 0.53。
2. 63%的學生選擇正確答案②；10%的學生選擇①；10%的學生選擇③；17%的學生選擇④。

## (三) 選項及學生表現說明

1. 本題鑑別度為 0.53，正確答案為選項②，通過率為 63%，顯示超過六成的學生已具備透過顛倒相乘將除法改用乘法來計算的能力，這些學生也具備將小數轉換成分數的能力。
2. 有 10%的學生選擇①（低分組有 20%），這些學生有可能不具備透過顛倒相乘將除法改用乘法來計算及將小數轉換成分數的能力；這些學生也可能誤解題意，選出成立的算式。
3. 有 10%的學生選擇③（低分組有 21%），這些學生有可能不具備透過顛倒相乘將除法改用乘法來計算及將小數轉換成分數的能力，無法將小數 0.125 改記成分數。
4. 有 17%的學生選擇④（低分組有 23%），這些學生有可能不具備透過顛倒相乘將除法改用乘法來計算及將小數轉換成分數的能力，無法將小數 0.125 改記成分數。

## 二、對應學習重點

	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	R-5-2 四則計算規律（II）： 乘除混合計算。「乘法 對加法或減法的分配 律」。將計算規律應用 於簡化混合計算。熟 練整數四則混合計 算。 備註：乘除混合：含 「連除兩數等於除以 兩數之積」；不做	R-6-1 數的計算規律：小學 最後應認識(1)整數、 小數、分數都是數，享 有一樣的計算規律。 (2)整數乘除計算及 規律，因分數運算更 容易理解。(3)逐漸 體會乘法和除法的計 算實為一體。併入其 他教學活動。	N-7-3 負數與數的四則混合 運算(含分數、小數)： 使用「正、負」表徵生 活中的量；相反數；數 的四則混合運算。

	$a \div (b \div c)$ 之去括號。必須呈現以下原則的範例：將應用問題轉化成算式後，再利用計算規律調整算式進行計算解題（其中調整後的算式已無法以原情境來解釋）。	備註：須理解小數和分數乘除混合計算時，常用的約分規則。在生活解題上，乘法和除法意義不同，但在計算上兩者實為一體，學生因此可提高數學認識之抽象層次。乘法和除法視為一體的好處是計算規律大為簡化。本條目不須另立獨立單元教學。	
--	---	---	--

### 三、教學建議

#### (一) 錯誤類型的可能原因

1. 學生無法將  $a \div 7$  改記成  $a \times \frac{1}{7}$ ，教師可以幫助學生先將  $a \div 7$  改記成  $a \div \frac{7}{1}$ ，再透過顛倒相乘將  $a \div \frac{7}{1}$  改記成  $a \times \frac{1}{7}$ 。
2. 學生可能不具備將小數轉換成分數的能力，無法將小數 0.125 改記成分數  $\frac{1}{8}$ 。
3. 學生可能不具備透過顛倒相乘將除法改用乘法來計算的能力。

#### (二) 核心概念與本題的教學重點

1. 學生要利用被除數和除數同時換單位的方法來解分數除法問題的計算比較麻煩。倘若利用分數乘以分數的倒數，也就是顛倒相乘的方式來解決分數除法問題的計算會比較簡單。因此教師應幫助學生理解遇到分數除法問題時，改用分數乘以分數的倒數也就是顛倒相乘來計算會比較有效率。

2. 在上述教學之前，教師可以先就整數的部分有序的來進行處理及引導。例如：

$$(1) 120 \div 5 = 120 \times \frac{1}{5}。$$

$$(2) 120 \times \frac{1}{2} = 120 \div 2 \dots\dots \text{可以讓學生辨認(1)跟(2)的式子有什麼不同？}$$

$$(3) 120 \div 5 \div 7 = 120 \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{7}。$$

$$(4) 120 \div 5 \times 7 = 120 \times \frac{1}{5} \times 7 \dots\dots \text{可以讓學生辨認(3)跟(4)的式子有什麼不同？}$$

3. 學生無法理解  $\div 7 \times 11$  即為  $\times \frac{11}{7}$ ，此部分是很多學生的迷思。教師可以利用先前所學習過的分數乘法問題來進行解釋。例如：

$$120 \times \frac{1}{5} \text{ 這個式子代表什麼意思？此即為將 } 120 \text{ 平分成 } 5 \text{ 份取其中的 } 1 \text{ 份。}$$

$$120 \times \frac{4}{5} \text{ 這個式子又代表什麼意思？此即為將 } 120 \text{ 平分成 } 5 \text{ 份取其中的 } 4 \text{ 份。}$$

$$\text{所以 } 120 \times \frac{4}{5} \text{ 可以寫成 } 120 \div 5 \times 4，\text{反之，} 120 \div 5 \times 4 = 120 \times \frac{4}{5}。$$

4. 有了上述的經驗後，可以將算式再進行改變，讓學生思考可以怎麼做？

$120 \times 3 \div 4$  可以寫成什麼？

(1) 學生可以先進行交換律，將  $120 \times 3 \div 4$  改寫成  $120 \div 4 \times 3$ ，然後又可以寫成分

數形式  $120 \times \frac{3}{4}$ ，其算式意義就是將 120 平分成 4 份選擇其中 3 份。

(2) 也可以將  $\div 4$  改寫成  $\times \frac{1}{4}$ ，即  $120 \times 3 \div 4 = 120 \times 3 \times \frac{1}{4}$ ，使其皆變為乘法式子。

(3) 還可以將  $120 \times 3 \div 4$  寫成  $\frac{120 \times 3}{4}$ 。

不管是 $[120 \times 3 \div 4]$ 、 $[120 \times 3 \times \frac{1}{4}]$ 、 $[120 \times \frac{3}{4}]$ 、 $[\frac{120 \times 3}{4}]$ 這幾個算式意義皆是一樣的。

5. 至於  $0.125$  和  $\frac{1}{8}$  的關係，教師有必要在讓學生練習整數相除或分小數換算後，如  $1 \div 8$ 、 $3 \div 8$ 、 $5 \div 8$ 、 $7 \div 8$  理解並熟記以下轉換，有助於日後的簡便運算的應用。

$$(1) 1 \div 8 = \frac{1}{8} = 0.125$$

$$(2) 3 \div 8 = \frac{3}{8} = 0.375$$

$$(3) 5 \div 8 = \frac{5}{8} = 0.625$$

$$(4) 7 \div 8 = \frac{7}{8} = 0.875$$

題號	試題代碼				答案	
7	114-M6-A1-07				3	
學習重點	N-6-2 最大公因數與最小公倍數：質因數分解法與短除法。兩數互質。運用到分數的約分與通分。 備註：不做三數的最大公因數與最小公倍數。應包含練習將分數化成最簡分數的問題。					
知識向度	數與計算		認知向度		概念理解	
題目	<p>下面是用短除法求 30 和 <math>A</math> 最大公因數或最小公倍數的計算過程，且 <math>C</math> 和 6 兩數互質。</p> <div><div>2</div><div><div>30</div><div><math>A</math></div></div><div><div><math>B</math></div><div>15 18</div></div><div><div><math>C</math></div><div>6</div></div></div> <p>下列敘述何者<u>錯誤</u>？</p> <p>① 30 和 <math>A</math> 的最大公因數是 <math>2 \times B</math></p> <p>② 30 和 <math>A</math> 的最小公因數是 1</p> <p>③ 30 和 <math>A</math> 的最大公倍數是 <math>30 \times A</math></p> <p>④ 30 和 <math>A</math> 的最小公倍數是 <math>2 \times B \times C \times 6</math></p>					
選答率	選 項	1	2	3*	4	其他
	全 體	0.11	0.20	0.57	0.11	0.00
	高分組	0.03	0.07	0.88	0.03	0.00
	低分組	0.21	0.32	0.27	0.21	0.00
		通過率：57%				
		鑑別度：0.61				
一、試題分析						
(一) 評量目標						
本題給定用短除法求兩數最大公因數及最小公倍數的計算過程，要求學生選出錯誤的敘述，評量學生利用短除法求最大公因數與最小公倍數的能力。						

## (二) 數據說明

1. 整體通過率 57%，高分組答對率 88%，低分組答對率 27%，鑑別度 0.61。
2. 57%的學生選擇正確答案③；11%的學生選擇①；20%的學生選擇②；11%的學生選擇④。

## (三) 選項及學生表現說明

1. 本題鑑別度為 0.61，正確答案為選項③，通過率為 57%，顯示近六成的學生已具備利用短除法求最大公因數與最小公倍數的能力。
2. 有 11%的學生選擇①（低分組有 21%），這些學生可能不具備利用短除法求最大公因數與最小公倍數的能力；這些學生可能不知道兩數的最小公因數是 1；也不知道不存在兩數的最大公倍數。
3. 有 20%的學生選擇②（低分組有 32%），這些學生可能不具備利用短除法求最大公因數與最小公倍數的能力；這些學生也能誤解題意，選擇正確的敘述。
4. 有 11%的學生選擇④（低分組有 21%），這些學生可能不具備利用短除法求最大公因數與最小公倍數的能力；這些學生可能不知道兩數的最小公因數是 1；也不知道不存在兩數的最大公倍數。

## 二、對應學習重點

	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	N-5-3 公因數和公倍數：因數、倍數、公因數、公倍數、最大公因數、最小公倍數的意義。 備註：以概念認識為主，不用短除法( N-6-1、N-6-2 )。	N-6-2 最大公因數與最小公倍數：質因數分解法與短除法。兩數互質。運用到分數的約分與通分。 備註：不做三數的最大公因數與最小公倍數。應包含練習將分數化成最簡分數的問題。	N-7-1 100 以內的質數：質數和合數的定義；質數的篩法。

### 三、教學建議

#### (一) 錯誤類型的可能原因

1. 學生可能不具備利用短除法求最大公因數與最小公倍數的能力。
2. 學生可能知道利用短除法求兩數最大公因數及最小公倍數的解題程序，但是不理解利用短除法求兩數最大公因數及最小公倍數計算過程的意義。
3. 用短除法求兩數最大公因數或最小公倍數的計算過程中含有未知數，學生可能無法掌握未知數的意義。
4. 學生可能不知道兩數的最小公因數是 1。
5. 學生可能不知道不存在兩數的最大公倍數。

#### (二) 核心概念與本題的教學重點

1. 建議教師幫助學生利用短除法求兩數的最大公因數時，質因數都要小於 20，被分解數要小於 100。
2. 建議教師只處理二個整數最大公因數的問題，不處理三個整數（以上）最大公因數的問題。
3. 建議教師先引入質因數分解法求兩數的最大公因數，再透過質因數分解法，引入短除法求兩數的最大公因數。教師不宜直接引入短除法求兩數的最大公因數。
4. 以「找出 30 和 24 的最大公因數」為例，說明如何利用短除法求兩數的最大公因數。

步驟一：複習質因數分解法求兩數的最大公因數，30 和 24 的最大公因數  $2 \times 3$  是共同質因數的乘積。

步驟二：2 是 30 和 24 共同的質因數，提出質因數 2，得到  $30 = 2 \times 15$ ， $24 = 2 \times 12$ ，此時帶學生看右邊的短除法過程。

2	30	24
	15	12

步驟三：此時剩下的 15 跟 12，他們還有一個共同的質因數是 3，所以繼續提出 3。得到  $30 = (2 \times 3) \times 5$ ， $24 = (2 \times 3) \times 4$

2	30	24
3	15	12
	5	4



步驟四：5 和 4 互質，沒有共同的質因數。

步驟五：共同質因數的乘積是  $2 \times 3$ ， $2 \times 3$  是 30 和 24 的最大公因數。

5. 以「找出 30 和 24 的最小公倍數」為例，說明如何利用短除法求兩數的最小公倍數。

步驟一：複習質因數分解法求兩數的最小公倍數，30 和 24 的最小公倍數「 $2 \times 3 \times 5 \times 4$ 」是「共同質因數乘積  $2 \times 3$ 」和「剩下質因數乘積  $5 \times 4$ 」的乘積。

2	3	0	2	4
3	1	5	1	2
		5		4

步驟二：2 是 30 和 24 共同的質因數，提出質因數 2，得到  $30 = 2 \times 15$ ， $24 = 2 \times 12$ 。

2	3	0	2	4
	1	5	1	2

步驟三：此時剩下的 15 跟 12，他們還有一個共同的質因數是 3，所以繼續提出 3。得到  $30 = (2 \times 3) \times 5$ ， $24 = (2 \times 3) \times 4$

2	3	0	2	4
3	1	5	1	2
		5		4

步驟四：5 和 4 互質，沒有共同的質因數。

步驟五：幫助學生認識下面的 4 可以質因數分解成  $2 \times 2$ 。

「共同質因數的乘積  $2 \times 3$ 」，是短除法左邊兩個質因數的乘積。

「剩下質因數乘積  $5 \times 4 = 5 \times 2 \times 2$ 」，是短除法下面兩數的乘積。

步驟六：最小公倍數是「共同質因數乘積」和「剩下質因數乘積」的乘積，只要將左邊的質因數 2、3，和下面的數字 5、4 相乘，就能得到最小公倍數  $= (2 \times 3) \times (5 \times 4)$  或  $(2 \times 3) \times (5 \times 2 \times 2)$ 。

6. 教師應幫助學生理解兩數的公因數是此兩數最大公因數的所有因數，公倍數是最小公倍數的倍數。利用短除法解題時，只能求出最大公因數，無法求出所有的公因數。

例如：要求 30 和 24 的所有公因數，只要求出最大公因數 6，然後再將此最大公因數 6 的所有因數列出，1，2，3，6 即為 30 和 24 的所有公因數。

所以我們利用短除法可以輕易求出兩數的最大公因數，又可以找出此兩數的所有公因數，此比在五年級時用使用將所有因數一一列出後再來找其所有因數更快速。若利用短除法解題時，能求出最小公倍數，也能利用最小公倍數找出其它更大的公倍數。

題號	試題代碼				答案		
8	114-M6-A3-08				2		
學習重點	N-5-10 解題：比率與應用。整數相除的應用。含「百分率」、「折」、「成」。 備註：本條目限結果不大於 1 ( 100% ) 的應用情境 ( 大於 1 之延伸情境見 N-6-8 ) 。						
知識向度	數與計算		認知向度		解題思考		
題目	五年甲班上學期有男生 13 人，女生 12 人，男生人數占全班的 52 %。 這學期轉進 5 位轉學生後，男生人數占全班的 50 %，請問轉入的學生中，男生有多少人？  ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4						
選答率	選 項	1	2*	3	4	其他	通過率：71%
	全 體	0.12	0.71	0.11	0.05	0.00	
	高分組	0.04	0.94	0.02	0.01	0.00	鑑別度：0.50
	低分組	0.19	0.44	0.24	0.13	0.01	
一、試題分析							
(一) 評量目標							
本題給定班級的男女生人數及轉入前後男生人數所佔的比率，要求學生選出轉入人數中男生的人數，評量學生利用比率解題的能力。							
(二) 數據說明							
1. 整體通過率 71%，高分組答對率 94%，低分組答對率 44%，鑑別度 0.5。							
2. 71%的學生選擇正確答案②；12%的學生選擇①；11%的學生選擇③；5%的學生選擇④。							
(三) 選項及學生表現說明							
1. 本題鑑別度為 0.5，正確答案為選項②，通過率為 71%，顯示超過七成的學生已具備利用比率解題的能力。							

2. 有 12% 的學生選擇① ( 低分組有 19% )，這些學生可能尚未具備利用比率解題的能力。
3. 有 11% 的學生選擇③ ( 低分組有 24% )，這些學生可能尚未具備利用比率解題的能力；這些學生可能沒有數感，不知道男生比率下降，轉入的男生人數應該比女生人數少。
4. 有 5% 的學生選擇④ ( 低分組有 13% )，這些學生可能尚未具備利用比率解題的能力；這些學生可能沒有數感，不知道男生比率下降，轉入的男生人數應該比女生人數少。

## 二、對應學習重點

	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	<p>N-5-6</p> <p>整數相除之分數表示：從分裝(測量)和平分的觀點，分別說明整數相除為分數之意義與合理性。</p> <p>備註：本條目的困難在於概念理解而非計算，教師應積極協助學生突破整數除法有餘數之固定想法，並轉化成商為分數的合理性。包含除可和「比率」的課題結合( N-5-10 )。</p>	<p>N-5-10</p> <p>解題：比率與應用。整數相除的應用。含「百分率」、「折」、「成」。</p> <p>備註：本條目限結果不大於 1 ( 100% ) 的應用情境 ( 大於 1 之延伸情境見 N-6-8 )。</p>	<p>N-6-6</p> <p>比與比值：異類量的比與同類量的比之比值的意義。理解相等的比中牽涉到的兩種倍數關係 ( 比例思考的基礎 )。解決比的應用問題。</p> <p>備註：比中各數原則上為整數，但也可包含簡單之小數與分數。</p>

## 三、教學建議

### (一) 錯誤類型的可能原因

1. 學生可能不具備利用比率解題的能力。
2. 學生可能沒有數感，不知道男生比率下降，轉入的男生人數應該比女生人數少。

## (二) 核心概念與本題的教學重點

### 1. 教師可以透過下列步驟幫助學生解題

步驟一：算出轉入前後的班級總人數

$$13+12=25$$

$$25+5=30$$

步驟二：算出轉入後男生的人數

$$30 \times 50\% = 15$$

步驟三：轉入前後的男生人數相減，算出轉入的男生人數

$$15-13=2$$

### 2. 本學習內容五年級引入比率，六年級引入比值，比率和比值的意義相同，都是用一個數表示兩量的關係，比率討論的是部分和全體的情境，限制以全體為基準量，部分為比較量，而比值討論是任意兩量的情境，可以選擇其中的一量為基準量，剩下的另一量為比較量。

### 3. 五年級比率教學的重點是部分及全體的關係。

例如：「全班 20 人，男生有 12 人，將全班人數看成基準量 1，男生人數看成比較量，男生人數佔全班的  $\frac{3}{5}$  ( 或 60% ) 」。

六年級比值的教學重點是基準量及比較量兩量間的關係。

例如：「甲的體重是 18 公斤，乙的體重是 30 公斤，將甲的體重看成基準量 1，乙的體重看成比較量，乙的體重是甲的  $\frac{5}{3}$  倍」。

### 4. 比率問題包含「比率未知」、「部分量未知」及「全部量未知」三類問題。

因為「全部量未知」的問題涉及除數是分數的除法計算，因此五年級只處理「比率未知」及「部分量未知」的問題，等待六年級引入除數是分數的除法後，再處理「全部量未知」的問題。

下面以「全班有 25 人，女生有 10 人」為例，說明這三類問題的題型：

比率未知問題：全班有 25 人，女生有 10 人，女生佔全班的幾分之幾？

部分量未知問題：全班有 25 人，女生佔全班的 $\frac{2}{5}$ ，女生有多少人？

全部量未知問題：女生有 10 人，佔全班的 $\frac{2}{5}$ ，全班有多少人？

5. 以「全班有 10 人，男生有 7 人，男生人數佔全班人數的多少？」問題為例，建議教師透過下面佈題引導，幫助學生掌握「男生人數佔全班人數的 $\frac{7}{10}$ 」的意義。

(1) 一盒蘋果有 10 顆，7 顆蘋果相當於多少盒？幫助學生理解「把 10 顆蘋果平分成 10 份，其中的 1 份是 1 顆蘋果，1 顆蘋果是 $\frac{1}{10}$ 盒，7 顆蘋果是 $\frac{7}{10}$ 盒」。

(2) 全班有 10 人，男生有 7 人，男生相當於多少班？

幫助學生理解「全班有 10 人，1 人是 $\frac{1}{10}$ 班，7 人是 $\frac{7}{10}$ 班」。

(3) 全班有 10 人，男生有 7 人，把全班當成 1 份，男生相當於多少份？

幫助學生理解「全班有 10 人，把全班當成 1 份，1 人是 $\frac{1}{10}$ 份，

7 人是 $\frac{7}{10}$ 份」。

(4) 全班有 10 人，男生有 7 人，男生人數佔全班人數的多少？

幫助學生理解「把全班人數( 10 個人 )當作 1 時，男生人數( 7 個人 )是 $\frac{7}{10}$ 」。

6.  $75\% = 75 : 100 = 0.75 : 1$ ，可以簡記成  $75\% = 0.75$ ，指的是當全體佔 1 份時，部分佔 0.75 份。

$75\% = 75 : 100 = \frac{75}{100} : 1 = \frac{3}{4} : 1$ ，可以簡記成  $75\% = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$ ，指的是當全體佔 100 份時，部分佔 75 份；或全體佔 4 份時，部分佔 3 份。

7. 百分率是常用的比率表示法，教師應幫助學生熟練常用百分率與分數的轉換。評量時以常用百分率與分數的轉換為宜。

例如： $100\% = \frac{100}{100} = 1$ 、 $50\% = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$ 、 $25\% = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$ 、 $75\% = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$ 、

$$20\% = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}, 40\% = \frac{40}{100} = \frac{2}{5}, 60\% = \frac{60}{100} = \frac{3}{5}, 80\% = \frac{80}{100} = \frac{4}{5},$$

$$10\% = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}。$$

8. 比率是比或比值的先備知識，教師可以幫助學生用兩量併置的想法來解釋比率問題。例如全班有 20 人，男生有 12 人，男生人數佔全班的 60%，指的是當全班

看成 100 人時，男生有 60 人；男生人數佔全班的  $\frac{3}{5}$ ，指的是將全班看成 1 份

時，男生有  $\frac{3}{5}$  份，或將全班看成 1 時，男生有  $\frac{3}{5}$ 。

因為六年級才引入比或比值的記法，因此不能利用比或比值的記法來記錄比率問題，例如：「男生人數：全班人數 = 12：20」或「男生人數：全班人數的比值為  $\frac{3}{5}$ 」。

9. 比率是部分與全體的關係，教師描述比率時應同時呈現部分與全體。

以「出席率為 80%」為例，教師應先說「出席人數和全班人數的比率為 80%」，等待學生掌握其意義後，再說明「出席人數和全班人數的比率為 80%」，可以簡稱為「出席率為 80%」。

- 10 「打八折」有兩種說法：

說法一：售價是定價的 0.8 倍。

把定價當 1，售價是 0.8，售價 ÷ 定價 = 0.8，售價 = 定價 × 0.8。

說法二：售價是定價的 80%。

把定價當 1，售價是  $\frac{80}{100}$ ，售價 ÷ 定價 =  $\frac{80}{100}$ ，售價 = 定價 ×  $\frac{80}{100}$ ，

售價 = 定價 × 80%。「20% off」是指把定價當作 1 時，售價比定價減少 20%。

為了與「20% off」教學一致性，建議教師採用說法二（售價是定價的 80%）引入「打八折」。

11. 教師應幫助學生區分「打八折」和「打七五折」的意義，「打八折」指的是售價是定價的 80%，「打七五折」指的是售價是定價的 75%。  
建議教師教學時先說明「打七五折」指的是售價是定價的 75%，再說明「打八折」指的是售價是定價的 80%，簡稱為「打八折」。
12. 建議教師仿打折的方式，透過百分率說明加成的意義。  
「加二成」指的是把成本當作 1 時，定價比成本多 20%，  
「加三成五」指的是把成本當作 1 時，定價比成本多 35%。
13. 本學習內容限制比率或百分率都不能大於 1。  
以「成本是 100 元，加二成五為定價，請問定價是多少元？」為例：  
教師可以透過「 $100 \times 25\% = 25$ ， $25 + 100 = 125$ 」算出定價是 125 元；  
但不宜透過「 $100\% + 25\% = 125\%$ ， $100 \times 125\% = 125$ 」算出定價是 125 元。



題號	試題代碼					答案	
9	114-M6-A1-09					1	
學習重點	N-6-5 解題：整數、分數、小數的四則應用問題。二到三步驟的應用解題。含使用概數協助解題。 備註：含處理分數和小數混合乘除計算之常用技巧。						
知識向度	數與計算		認知向度		概念理解		
題目	「一根竹竿長 $2\frac{3}{7}$ 公尺，全長的 $\frac{2}{5}$ 漆上油漆，請問沒有漆上油漆部分的長是多少公尺？」下列哪個算式可以算出正確答案？  ① $2\frac{3}{7} \times (1 - \frac{2}{5})$ ② $2\frac{3}{7} \times \frac{2}{5} - 2\frac{3}{7}$ ③ $2\frac{3}{7} - 2\frac{3}{7} \div \frac{2}{5}$ ④ $(1 - \frac{2}{5}) \div 2\frac{3}{7}$						
選答率	選 項	1*	2	3	4	其他	通過率：79%
	全 體	0.79	0.06	0.07	0.08	0.00	
	高分組	0.98	0.01	0.01	0.01	0.00	鑑別度：0.47
	低分組	0.50	0.15	0.16	0.19	0.01	
一、試題分析							
(一) 評量目標							
本題是分數情境先減後乘的兩步驟問題，要求學生列出解題的算式，評量學生兩步驟問題列式的能力。							
(二) 數據說明							
1. 整體通過率 79%，高分組答對率 98%，低分組答對率 50%，鑑別度 0.47。							
2. 79%的學生選擇正確答案①；6%的學生選擇②；7%的學生選擇③；8%的學生選擇④。							

### (三) 選項及學生表現說明

1. 本題鑑別度為 0.47，正確答案為選項①，通過率為 79%，顯示近八成的學生已具備分數情境先減後乘兩步驟問題列式的能力。
2. 有 6%的學生選擇②（低分組有 15%），這些學生可能未具備分數情境先減後乘兩步驟問題列式的能力；也可能不理解或誤解題意。
3. 有 7%的學生選擇③（低分組有 16%），這些學生可能未具備分數情境先減後乘兩步驟問題列式的能力；也可能不理解或誤解題意。
4. 有 8%的學生選擇④（低分組有 19%），這些學生可能未具備分數情境先減後乘兩步驟問題列式的能力；也可能不理解或誤解題意。

## 二、對應學習重點

	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	N-5-2 解題：多步驟應用問題。除「平均」之外，原則上為三步驟解題應用。 備註：以學生較熟悉、能直接併式之問題為原則。本條目要求併式。須含分配律情境之三步驟問題，以和分配律教學連結（R-5-2）。	N-6-5 解題：整數、分數、小數的四則應用問題。二到三步驟的應用解題。含使用概數協助解題。 備註：含處理分數和小數混合乘除計算之常用技巧。	N-7-4 數的運算規律：交換律；結合律；分配律； $-(a+b)=-a-b$ ； $-(a-b)=-a+b$ 。

## 三、教學建議

### (一) 錯誤類型的可能原因

1. 學生可能不具備分數情境先減後乘兩步驟問題列式的能力。
2. 學生可能不理解或誤解題意，例如不理解「全長的 $\frac{2}{5}$ 」是什麼意思。

## (二) 核心概念與本題的教學重點

1. 兩步驟問題的教學包含三個重點，第一個重點是能夠解決問題，並用二個算式記錄解題過程；第二個重點是能夠用併式記錄解題過程；第三個重點是能夠列式，並用逐次減項的記法記錄解題過程。

2. 以分數兩步驟問題「媽媽買了 $\frac{10}{3}$ 公升的果汁 6 瓶，全部分裝到 $\frac{5}{4}$ 公升的杯子裡，相當於裝滿幾杯？」為例，如果學生無法解題，建議教師先將原問題修改為整數情境的問題，例如修改為「媽媽買了 10 公升的果汁 6 瓶，全部分裝到 5 公升的瓶子裡，相當於裝滿幾瓶？」。待學生解題成功後，再回到原分數情境的問題，希望學生能類比整數情境的問題來解決相同情境分數的問題。

3. 下面以「甲有 15 元，乙有 25 元，1 枝鉛筆賣 5 元，兩人合起來可以買幾枝？」為例，說明整數兩步驟問題的教學流程。

教師可以仿下面的教學流程，進行分數兩步驟問題的教學。

- (1) 用兩個算式記錄解題活動

$$15 + 25 = 40, 40 \div 5 = 8, \text{答：可以買 8 枝}$$

- (2) 將兩個算式改記成併式的記法

$$\text{將「} 15 + 25 = 40, 40 \div 5 = 8 \text{」改記成「} (15 + 25) \div 5 = 8 \text{」}$$

- (3) 用併式記錄解題活動

$$(15 + 25) \div 5 = 8, \text{答：可以買 8 枝}$$

- (4) 用算式填充題來列式

$$(15 + 25) \div 5 = ( \quad )$$

- (5) 先列式，再用逐次減項記錄解題活動

$$(15 + 25) \div 5 = ( \quad )$$

$$(15 + 25) \div 5$$

$$= 40 \div 5$$

$$= 8 \quad \text{答：可以買 8 枝}$$

4. 以「 $\frac{10}{3}$ 公尺長的繩子相當於 $\frac{3}{8}$ 條， $\frac{4}{11}$ 條長多少公尺？」為例，建議教師可透過

下列步驟引導學生解題。

步驟一：透過分段布題，幫助學生解題先布

「 $\frac{10}{3}$ 公尺長的繩子相當於 $\frac{3}{8}$ 條，1條長多少公尺？」，

要求學生用算式 $\frac{10}{3} \div \frac{3}{8} = \frac{80}{9}$ 把做法記下來。

$$\begin{array}{ccc}
 \frac{10}{3} \text{公尺} & \longleftrightarrow & \frac{3}{8} \text{條} \\
 \div \frac{3}{8} \quad \downarrow & & \downarrow \quad \div \frac{3}{8} \\
 ? \text{公尺} & & 1 \text{條} \\
 \\ 
 \frac{10}{3} \div \frac{3}{8} & & 
 \end{array}$$

步驟二：再布「1條繩子長 $\frac{80}{9}$ 公尺， $\frac{4}{11}$ 條長多少公尺？」

要求學生用算式 $\frac{80}{9} \times \frac{4}{11} = \frac{320}{99}$ 把做法記下來。

$$\begin{array}{ccc}
 \frac{80}{9} \text{公尺} & \longleftrightarrow & 1 \text{條} \\
 \times \frac{4}{11} \quad \downarrow & & \downarrow \quad \times \frac{4}{11} \\
 ? \text{公尺} & & \frac{4}{11} \text{條} \\
 \\ 
 \frac{80}{9} \times \frac{4}{11} & & 
 \end{array}$$

步驟三：回到原問題，要求學生先用兩個算式把作法記下來，

再改用併式 $\frac{10}{3} \div \frac{3}{8} \times \frac{4}{11} = \frac{320}{99}$ 記錄。

步驟四：要求學生用一個併式 $\frac{10}{3} \div \frac{3}{8} \times \frac{4}{11} = \frac{320}{99}$ 把做法記下來。

步驟五：要求學生先列式 $\frac{10}{3} \div \frac{3}{8} \times \frac{4}{11} = ( \quad )$ ，

再用逐次減項的記法記錄解題活動。

$$\frac{10}{3} \div \frac{3}{8} \times \frac{4}{11} = \frac{80}{9} \times \frac{4}{11} = \frac{320}{99}$$

	$\frac{10}{3}$ 公尺	$\longleftrightarrow$	$\frac{3}{8}$ 條	
$\div \frac{3}{8}$	$\downarrow$		$\downarrow$	$\div \frac{3}{8}$
	? 公尺		1 條	
$\times \frac{4}{11}$	$\downarrow$		$\downarrow$	$\times \frac{4}{11}$
	? 公尺		$\frac{4}{11}$ 條	

題號	試題代碼				答案		
10	114-M6-A1-10				4		
學習重點	N-6-3 分數的除法：整數除以分數、分數除以分數的意義。最後理解除以一數等於乘以其倒數之公式。 備註：可不處理餘數問題。若要處理，限於具體合理的生活情境。餘數問題不評量。						
知識向度	數與計算		認知向度		概念理解		
題目	將 12 公斤的綠豆，每 $\frac{2}{9}$ 公斤裝成 1 包，可以裝成 54 包。 如果改成每 $\frac{1}{9}$ 公斤裝成 1 包，可以裝成 $a$ 包， 改成每 $\frac{6}{9}$ 公斤裝成 1 包，可以裝成 $b$ 包。 請問 $a$ 是 $b$ 的多少倍？ ① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{2}{27}$ ③ 3 ④ 6						
選答率	選 項	1	2	3	4*	其他	通過率：60%
	全 體	0.18	0.09	0.13	0.60	0.00	
	高分組	0.11	0.01	0.02	0.86	0.00	鑑別度：0.55
	低分組	0.22	0.20	0.28	0.30	0.01	
一、試題分析							
(一) 評量目標							
本題給定整數除以分數的商，要求學生判斷被除數不變、除數改變時商的倍數關係，評量學生利用分數除法解題的能力。							

## (二) 數據說明

1. 整體通過率 60%，高分組答對率 86%，低分組答對率 30%，鑑別度 0.55。
2. 60%的學生選擇正確答案④；18%的學生選擇①；9%的學生選擇②；13%的學生選擇③。

## (三) 選項及學生表現說明

1. 本題鑑別度為 0.55，正確答案為選項④，通過率為 60%，顯示六成的學生已具備利用分數除法解題的能力。
2. 有 18%的學生選擇①（低分組有 22%），這些學生可能尚未具備利用分數除法解題的能力；也可能尚未掌握「被除數相同、除數不同」時，商的關係，透過 $\frac{1}{9}$   
 $\div \frac{6}{9} = \frac{1}{6}$ ，得到 $\frac{1}{6}$ 的答案。
3. 有 9%的學生選擇②（低分組有 20%），這些學生可能尚未具備利用分數除法解題的能力；也可能誤解題意，解讀為分數乘法問題透過 $\frac{6}{9} \times \frac{1}{9} = \frac{2}{27}$ ，得到 $\frac{2}{27}$ 的答案。
4. 有 13%的學生選擇③（低分組有 28%），這些學生可能尚未具備利用分數除法解題的能力；也可能尚未掌握「被除數相同、除數不同」時，商的關係，透過 $\frac{6}{9}$   
 $\div \frac{2}{9} = 3$ ，得到 3 的答案。

## 二、對應學習重點

	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	N-5-7 分數除以整數：分數除以整數的意義。最後將問題轉化為乘以單位分數。 備註：等分除教學可運用乘法分數倍之經	N-6-3 分數的除法：整數除以分數、分數除以分數的意義。最後理解除以一數等於乘以其倒數之公式。	N-6-5 解題：整數、分數、小數的四則應用問題。二到三步驟的應用解題。含使用概數協助解題。

	驗 ( N-5-5 )。包含除可和「比率」的課題結合 ( N-5-10 )。	備註：可不處理餘數問題。若要處理，限於具體合理的生活情境。餘數問題不評量。	備註：含處理分數和小數混合乘除計算之常用技巧。
--	--	---------------------------------------	-------------------------

### 三、教學建議

#### (一) 錯誤類型的可能原因

1. 學生可能尚未具備利用分數除法解題的能力。
2. 題目中含有未知數 a、b，學生可能無法掌握未知數的意義。
3. 學生可能利用分數除法算出 a 與 b 後，無法正確用除法計算出 a 是 b 的幾倍。

#### (二) 核心概念與本題的教學重點

1. 除數是分數的包含除問題，包含有餘數和沒有餘數兩種題型：

有餘數的問題：緞帶長  $\frac{9}{5}$  公尺，每  $\frac{4}{7}$  公尺做一朵花，最多可以做成幾朵花？剩下幾公尺？

沒有餘數的問題：緞帶長  $\frac{9}{5}$  公尺，每  $\frac{4}{7}$  公尺做一朵花，全部做完，相當於做成多少朵花？

2. 以「 $\frac{41}{5}$  公升果汁， $\frac{4}{7}$  公升裝 1 瓶，全部裝完，相當於裝成幾瓶？」為例，說明如何引入沒有餘數的分數除法算則（顛倒相乘）。

步驟一：利用被除數及除數同時換單位策略來解題。

$$\begin{aligned}
 & \frac{41}{5} \div \frac{4}{7} \\
 &= \frac{41 \times 7}{5 \times 7} \div \frac{4 \times 5}{7 \times 5} \quad (\text{通分}) \\
 &= (41 \times 7) \div (4 \times 5) \quad (\text{同時以 } \frac{1}{35} \text{ 公升換單位}) \\
 &= \frac{41 \times 7}{4 \times 5} \quad \text{答：相當於裝成 } \frac{41 \times 7}{4 \times 5} \text{ 瓶}
 \end{aligned}$$



步驟二：學生不易發現問題「 $\frac{41}{5} \div \frac{4}{7}$ 」和答案「 $\frac{41 \times 7}{4 \times 5}$ 」的關係。教師先將答案改記成兩分數的乘積。

$$\frac{41 \times 7}{4 \times 5} = \frac{41 \times 7}{5 \times 4} \quad (\text{乘法交換律})$$

$$= \frac{41}{5} \times \frac{7}{4} \quad (\text{分數} \times \text{分數} = \frac{\text{分子} \times \text{分子}}{\text{分母} \times \text{分母}})$$

步驟三：要求學生觀察問題「 $\frac{41}{5} \div \frac{4}{7}$ 」和改寫後答案「 $\frac{41}{5} \times \frac{7}{4}$ 」的關係。幫助學生發現可以利用顛倒相乘的方式直接算出答案。

3. 以「 $\frac{41}{5}$  公升果汁， $\frac{4}{7}$  公升裝 1 瓶，最多裝滿幾瓶，還剩下多少公升？」為例，說明如何幫助學生解有餘數的包含除問題。下面提供兩種解題的方法：

方法一：利用被除數和除數同時換單位策略來解題。

$$\frac{41}{5} \text{ 公升} = \frac{287}{35} \text{ 公升} \Rightarrow 287 \text{ 個 } \frac{1}{35} \text{ 公升}$$

$$\frac{4}{7} \text{ 公升} = \frac{20}{35} \text{ 公升} \Rightarrow 20 \text{ 個 } \frac{1}{35} \text{ 公升}$$

$$287 \div 20 = 14 \text{ (瓶)} \dots 7 \text{ (7 個 } \frac{1}{35} \text{ 公升)}$$

$$\text{可以記成：} \frac{287}{35} \div \frac{20}{35} = 14 \dots \frac{7}{35} \left( \frac{7}{35} = \frac{1}{5} \right)$$

答：最多裝滿 14 瓶，剩下  $\frac{1}{5}$  公升

方法二：利用沒有餘數的分數除法算則（顛倒相乘）來解題。

步驟一：利用顛倒相乘算出全部裝完相當於多少瓶。

$$\frac{41}{5} \div \frac{4}{7} = \frac{41}{5} \times \frac{7}{4} = \frac{287}{20} = 14 \frac{7}{20} \text{ (瓶)}$$

步驟二：說明  $14 \frac{7}{20} = 14 \text{ (瓶)} + \frac{7}{20} \text{ (瓶)}$ ，所以最多裝滿 14 瓶，剩下  $\frac{7}{20}$  瓶。

步驟三：將剩下的  $\frac{7}{20}$  瓶換成多少公升。 $\frac{4}{7} \times \frac{7}{20} = \frac{1}{5}$ （公升），

答：最多裝滿 14 瓶，剩下  $\frac{1}{5}$  公升

4. 建議教師可以先從情境中，幫助學生理解被除數、除數和商的關係。教師可引導學生分別算出下列問題，並做成紀錄表來觀察。

問題一：「一袋麵粉 24 公斤，每 1 公斤裝成 1 包，全部裝完，可以裝成幾包？」

問題二：「一袋麵粉 24 公斤，每  $2\frac{2}{3}$  公斤裝成 1 包，全部裝完，可以裝成幾包？」

問題三：「一袋麵粉 24 公斤，每  $\frac{2}{3}$  公斤裝成 1 包，全部裝完，可以裝成幾包？」

一袋麵粉（公斤）	1 包的重量（公斤）	分裝成幾包（包）
24	1	24
24	$2\frac{2}{3}$	9
24	$\frac{2}{3}$	36

問題一：一袋麵粉 24 公斤， $24 \div 1 = 24$ ，1 公斤麵粉裝成 1 包時，剛好可以分裝成 24 包。

問題二：一袋麵粉 24 公斤  $24 \div 2\frac{2}{3} = 9$ ，9 包 < 24 包。 $2\frac{2}{3}$  公斤麵粉裝成 1 包時，分裝成的包數比 24 包少。

問題三：一袋麵粉 24 公斤， $24 \div \frac{2}{3} = 36$ ，36 包 > 24 包。 $\frac{2}{3}$  公斤麵粉裝成 1 包時，分裝成的包數比 24 包多。

教師可透過分麵粉的情境，幫助學生理解被除數、除數和商的關係。一袋麵粉 24

公斤，每 1 包裝的麵粉越多( $2\frac{2}{3}$ )，裝成的包數就會越少。每 1 包裝的麵粉越少

( $\frac{2}{3}$ )，裝成的包數就會越多。

5. 從多個分數除法算式中，幫助學生理解被除數、除數和商的關係。以下面算式為例：

被除數		除數		商
90	÷	$\frac{8}{3}$	=	$\frac{270}{8}$
90	÷	$\frac{4}{3}$	=	$\frac{270}{4}$
90	÷	1	=	90
90	÷	$\frac{2}{3}$	=	$\frac{270}{2}$
90	÷	$\frac{1}{3}$	=	$\frac{270}{1}$

教師宜幫助學生觀察表格，理解被除數、除數和商的關係。

(1) 當被除數相同時，除數 = 1，被除數和商一樣大。

(2) 當被除數相同時，除數 > 1，被除數比商大。

(3) 當被除數相同時，除數 < 1，商比被除數大。

(4) 當被除數相同時，除數 A 是除數 B 的 2 倍，商會是  $\frac{1}{2}$  倍；




當被除數相同時，除數 A 是除數 B 的 4 倍，商會是  $\frac{1}{4}$  倍；

當被除數相同時，除數 A 是除數 B 的 8 倍，商會是  $\frac{1}{8}$  倍。

(5) 當被除數相同時，除數 A 是除數 B 的  $\frac{1}{2}$  倍，商會是 2 倍；

當被除數相同時，除數 A 是除數 B 的  $\frac{1}{4}$  倍，商會是 4 倍；

當被除數相同時，除數 A 是除數 B 的  $\frac{1}{8}$  倍，商會是 8 倍。

題號	試題代碼		答案																													
11	114-M6-D3-11		4																													
學習重點	R-6-3 數量關係的表示：代數與函數的前置經驗。將具體情境或模式中的數量關係，學習以文字或符號列出數量關係的關係式。 備註：數量關係的表示例如：晝長夜長的關係可列成晝長+夜長=24。連結 R-6-2。含部分運用符號的教學，連結國中「符號代表數」或「未知數」教學，其教學重點在「關係的表示」，而非抽象的「代數符號演算」。																															
知識向度	關係	認知向度	解題思考																													
題目	<p>下圖是火車座位的配置圖。</p> <div><table><tr><td colspan="2"></td><td rowspan="8">走 道</td><td colspan="2">WC</td></tr><tr><td>42</td><td>44</td><td>43</td><td>41</td></tr><tr><td>38</td><td>40</td><td>39</td><td>37</td></tr><tr><td>34</td><td>36</td><td>35</td><td>33</td></tr><tr><td>30</td><td>32</td><td>31</td><td>29</td></tr><tr><td>C</td><td>A</td><td>D</td><td>E</td></tr><tr><td></td><td>B</td><td></td><td>F</td></tr></table></div> <p>根據上圖，下列敘述何者正確？</p> <p>① <math>A - B = 2</math></p> <p>② <math>A + C = 2</math></p> <p>③ <math>D + 2 = E</math></p> <p>④ <math>F + 4 = E</math></p>					走 道	WC		42	44	43	41	38	40	39	37	34	36	35	33	30	32	31	29	C	A	D	E		B		F
		走 道	WC																													
42	44		43	41																												
38	40		39	37																												
34	36		35	33																												
30	32		31	29																												
C	A		D	E																												
	B			F																												
選答率	選 項		1	2	3	4*	其他	通過率：65%																								
	全 體	0.10	0.11	0.14	0.65	0.00																										
	高分組	0.03	0.02	0.04	0.91	0.00	鑑別度：0.58																									
	低分組	0.20	0.23	0.24	0.33	0.00																										

## 一、試題分析

### (一) 評量目標

本題給定含有數字和符號標示的火車座位圖，要求學生選出正確的算式，評量學生利用數字及符號列出數量關係式的能力。

### (二) 數據說明

1. 整體通過率 65%，高分組答對率 91%，低分組答對率 33%，鑑別度 0.58。
2. 65%的學生選擇正確答案④；10%的學生選擇①；11%的學生選擇②；14%的學生選擇③。

### (三) 選項及學生表現說明

1. 本題鑑別度為 0.58，正確答案為選項④，通過率為 65%，顯示六成五的學生已具備利用數字及符號列出數量關係式的能力。
2. 有 10%的學生選擇①（低分組有 20%），這些學生可能未具備利用數字及符號列出數量關係式的能力；這些學生也可能不具備二維數量模式的觀察與推理的能力（四年級教材）。
3. 有 11%的學生選擇②（低分組有 23%），這些學生可能未具備利用數字及符號列出數量關係式的能力；這些學生也可能不具備二維數量模式的觀察與推理的能力（四年級教材）。
4. 有 14%的學生選擇③（低分組有 24%），這些學生可能未具備利用數字及符號列出數量關係式的能力；這些學生也可能不具備二維數量模式的觀察與推理的能力（四年級教材）。

## 二、對應學習重點

	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	R-5-3 以符號表示數學公式：國中代數的前置經驗。初步體驗符號之使用，隱含「符號代表數」、「符號與運算符號的結合」的經驗。	R-6-3 數量關係的表示：代數與函數的前置經驗。將具體情境或模式中的數量關係，學習以文字或符號列出數量關係的關係式。	A-7-1 代數符號：以代數符號表徵交換律、分配律、結合律；一次式的化簡及同類項；以符號記錄生活中的情境問題。

	<p>應併入其他教學活動。</p> <p>備註：藉由幾何圖形的面積與體積公式較易進行。也可在分數乘法中運用。本條目並非取代「文字表示公式」( R-4-3 )，後者較易理解之優點仍可保持。</p>	<p>備註：數量關係的表示例如：晝長夜長的關係可列成晝長+夜長=24。連結 R-6-2。含部分運用符號的教學，連結國中「符號代表數」或「未知數」教學，其教學重點在「關係的表示」，而非抽象的「代數符號演算」。</p>	
--	---	---	--

### 三、教學建議

#### (一) 錯誤類型的可能原因

1. 學生不具備利用數字及符號列出數量關係式的能力。
2. 學生未能觀察與推理二維變化模式之規律 ( 四年級教材 ) 。

#### (二) 核心概念與本題的教學重點

1. 數量關係的表示是代數與函數的前置經驗，因為方程式和函數都是因為要描述某種問題中的數量關係而建立的。
2. 在四、五年級，學生已經學習過某些數量關係的公式表示，教師可鼓勵學生自己將發現的規律表示出來，因此引導的問題應盡量容易。例如晝長和夜長的總和是24時。因此可表示成「日+夜=24」、「白天+晚上=24」、「晝長+夜長=24」、「 $W+B=24$ 」，重點在於學生用自己的語言去描述這樣的規律，並能運用於解題。
3. 教師可選擇部分課題，進行運用「符號表示公式」的教學，這比用「文字表示公式」抽象，但也更接近國中代數用「符號代表數」或「未知數」的教學。教學或活動時，教師務必與學生清楚約定符號的意義 ( 就像面積教學時，符號可以清楚出現在圖中。 )
4. 表示公式時，不必在意符號數目的多寡，一切以「清楚表示數量關係」為原則，這裡不是進行多變數的方程式教學，教師尤其不要進行抽象的「代數符號演算」。
5. 當問題相對複雜時，則不強求學生把問題分層記成許多關係式 ( 不予評量 )，更不可進行這些抽象關係式的演算。

題號	試題代碼					答案											
12	114-M6-C3-12					1											
學習重點	S-6-1 放大與縮小：比例思考的應用。「幾倍放大圖」、「幾倍縮小圖」。知道縮放時，對應角相等，對應邊成比例。 備註：知道常見平面圖形的縮放仍然是同一類圖形(含圓)，並能說明其原因																
知識向度	空間與形狀		認知向度		解題思考												
題目	<p>某家造紙廠依照下表製造 M2、M3、M4 等紙張。紙張型號 M2 的尺寸，指的是紙張寬 420 mm，長 600 mm。</p> <table><tr><th>紙張型號</th><th>紙張尺寸</th></tr><tr><td>M2</td><td>420 × 600 mm</td></tr><tr><td>M3</td><td>300 × 420 mm</td></tr><tr><td>M4</td><td>210 × 300 mm</td></tr><tr><td>M5</td><td>150 × 210 mm</td></tr><tr><td>M6</td><td>105 × 150 mm</td></tr></table> <p>根據此表，請問哪種型號的紙張是 M4 的 2 倍放大圖？</p> <p>① M2 ② M3 ③ M5 ④ M6</p>					紙張型號	紙張尺寸	M2	420 × 600 mm	M3	300 × 420 mm	M4	210 × 300 mm	M5	150 × 210 mm	M6	105 × 150 mm
紙張型號	紙張尺寸																
M2	420 × 600 mm																
M3	300 × 420 mm																
M4	210 × 300 mm																
M5	150 × 210 mm																
M6	105 × 150 mm																
選答率	選 項	1*	2	3	4	其他	通過率：72%										
	全 體	0.72	0.15	0.05	0.07	0.00											
	高分組	0.88	0.10	0.01	0.01	0.00	鑑別度：0.39										
	低分組	0.48	0.21	0.13	0.17	0.00											
一、試題分析																	
(一) 評量目標																	
本題給定標示不同型號紙張長乘寬的表格，要求學生找出指定型號的2倍放大圖，評量學生利用放大圖與縮小圖性質解題的能力。																	
(二) 數據說明																	
1. 整體通過率 72%，高分組答對率 88%，低分組答對率 48%，鑑別度 0.39。																	

2. 72%的學生選擇正確答案①；15%的學生選擇②；5%的學生選擇③；7%的學生選擇④。

### (三) 選項及學生表現說明

1. 本題鑑別度為 0.39，正確答案為選項①，通過率為 72%，顯示超過七成的學生已具備利用放大圖與縮小圖性質解題的能力。
2. 有 15%的學生選擇②（低分組有 21%），這些學生可能未具備利用放大圖與縮小圖性質解題的能力；也可能無法正確報讀紙張尺寸的表格。
3. 有 5%的學生選擇③（低分組有 13%），這些學生可能未具備利用放大圖與縮小圖性質解題的能力；也可能無法正確報讀紙張尺寸的表格。
4. 有 7%的學生選擇④（低分組有 17%），這些學生可能未具備利用放大圖與縮小圖性質解題的能力；也可能無法正確報讀紙張尺寸的表格。

## 二、對應學習重點

	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	<p>S-4-6</p> <p>平面圖形的全等：以具體操作為主。形狀大小一樣的兩圖形全等。能用平移、旋轉、翻轉做全等疊合。全等圖形之對應角相等、對應邊相等。</p> <p>備註：在具有平移或旋轉對稱特性的圖形上，學生可察覺豐富的全等模式。平移、旋轉、翻轉描述操作的方式，非名詞教學，名詞不應出現。</p>	<p>S-6-1</p> <p>放大與縮小：比例思考的應用。「幾倍放大圖」、「幾倍縮小圖」。知道縮放時，對應角相等，對應邊成比例。</p> <p>備註：知道常見平面圖形的縮放仍然是同一類圖形（含圓），並能說明其原因。</p>	<p>S-6-2</p> <p>解題：地圖比例尺。地圖比例尺之意義、記號與應用。地圖上兩邊長的比和實際兩邊長的比相等。</p> <p>備註：含處理兩張地圖之間的長度關係。處理以為「比例分母愈大，相對邊長也愈大」的常見錯誤。</p>



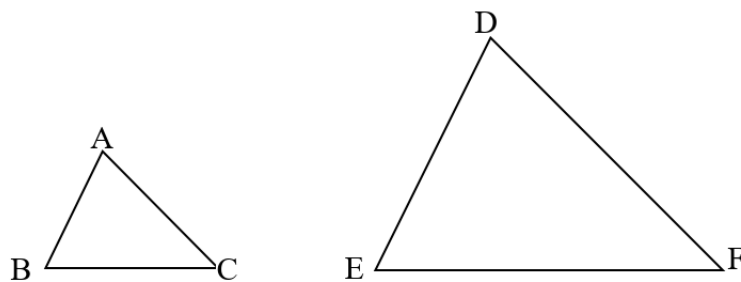
### 三、教學建議

#### (一) 錯誤類型的可能原因

1. 學生可能不具備利用放大圖與縮小圖性質解題的能力。
2. 學生可能無法正確報讀紙張尺寸的表格。

#### (二) 核心概念與本題的教學重點

1. 教師應透過操作與測量協助學生學習圖形的放大圖、縮小圖，幫助學生看到兩個相似圖形間構成要素的對應關係，例如：三角形 DEF 是三角形 ABC 的 2 倍放大圖，邊 AB 的對應邊為邊 DE，邊 DE 的長度 = 邊 AB 的長度  $\times 2$ ，邊 BC 的對應邊為邊 EF，邊 EF 的長度 = 邊 BC 的長度  $\times 2$ ，邊 AC 的對應邊為邊 DF，邊 DF 的長度 = 邊 AC 的長度  $\times 2$ ；A 點的對應點為 D 點，B 點的對應點為 E 點，C 點的對應點為 F 點； $\angle A$  的對應角為  $\angle D$ ， $\angle A = \angle D$ ， $\angle B$  的對應角為  $\angle E$ ， $\angle B = \angle E$ ， $\angle C$  的對應角為  $\angle F$ ， $\angle C = \angle F$ 。



2. 教師應幫助學生連絡「比」、「比值」和「幾倍放大（縮小）圖」的關係。教師應幫助學生認識下面三種表示法都可以說明「三角形 DEF 是三角形 ABC 的 2 倍放大圖」的關係，為引入比例尺的教學鋪路。

第一種：比的表示法

$$\overline{DE} : \overline{AB} = 2 : 1, \overline{EF} : \overline{BC} = 2 : 1, \overline{DF} : \overline{AC} = 2 : 1$$

第二種：比值的表示法

$$\overline{DE} \div \overline{AB} = 2, \overline{EF} \div \overline{BC} = 2, \overline{DF} \div \overline{AC} = 2$$

第三種：倍的表示法

$$\overline{DE} \text{ 長是 } \overline{AB} \text{ 的 } 2 \text{ 倍}, \overline{EF} \text{ 長是 } \overline{BC} \text{ 的 } 2 \text{ 倍}, \overline{DF} \text{ 長是 } \overline{AC} \text{ 的 } 2 \text{ 倍}。$$

3. 以「將正方形甲對摺兩次，得到正方形乙，請問正方形乙是正方形甲的幾倍縮小圖？」為例，有兩種溝通幾倍縮小圖的方法。

第一種：利用邊長的關係來溝通

正方形甲和正方形乙相似，對應邊成比例，正方形乙的邊長是正方形甲

對應邊長的 $\frac{1}{2}$ 倍，稱正方形乙是正方形甲的 $\frac{1}{2}$ 倍縮小圖。

第二種：利用面積的關係來溝通

正方形乙的面積是正方形甲面積的 $\frac{1}{4}$ 倍，稱正方形乙是正方形甲的 $\frac{1}{4}$ 倍縮小圖。

因為長度比面積容易測量，因此數學上約定乙是甲的 $\frac{1}{n}$ 倍縮小圖，指的是乙的邊

長是甲的 $\frac{1}{n}$ 倍，不是指乙的面積是甲的 $\frac{1}{n}$ 倍。

4. 放大和縮小都是兩個圖形的關係，教師在課堂活動或評量時，應同時描述放大或縮小前、後的兩個圖形。

例如「 $\triangle ABC$ ， $\angle A = 35^\circ$ ， $\angle B = 20^\circ$ ，將該三角形放大 2 倍後， $\angle C = ?$ 」就是錯誤的描述方式，因為問題中沒有說明 $\triangle ABC$  放大為 2 倍後的圖形為何，正確的描述是「 $\triangle ABC$ ， $\angle A = 35^\circ$ ， $\angle B = 20^\circ$ ，將 $\triangle ABC$  放大為 2 倍後的圖形是 $\triangle DEF$ ，求 $\angle F = ?$ 」。

5. 「放大 2 倍」和「放大為 2 倍」的意義不同，「放大 2 倍」和「放大為 3 倍」的意義相同。

以邊長是 5 公分的正方形甲為例，正方形甲放大為 2 倍後的圖形是正方形乙，正方形乙的邊長是 10 公分；正方形甲放大 2 倍後的圖形是正方形丙，正方形丙的邊長比正方形甲多 10 公分，所以正方形丙的邊長是 15 公分。教師在課堂活動時應使用「放大為 2 倍」的敘述，不可以評量「邊長放大 2 倍，面積或邊長放大為幾倍」的問題。

6. 以「長方形甲長邊長 5 公分、寬邊長 3 公分，長方形乙是長方形甲的 4 倍放大圖，請問長方形乙的面積是長方形甲的多少倍？」為例，說明如何幫助學生解題。

步驟一：長方形乙是長方形甲的 4 倍放大圖，長方形乙的長邊是  $5 \times 4$  公分，寬邊是  $3 \times 4$  公分。

步驟二：長方形甲的面積 =  $5 \times 3$

$$\text{長方形乙的面積} = (5 \times 4) \times (3 \times 4) = 5 \times 4 \times 3 \times 4$$

長方形乙的面積是長方形甲的  $4 \times 4$  倍

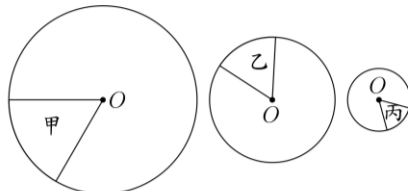
步驟三：要求學生觀察長方形乙的面積 =  $(5 \times 4) \times (3 \times 4)$  和

長方形甲的面積 =  $5 \times 3$ ，以及答案  $4 \times 4$  倍。

幫助學生理解答  $4 \times 4$  倍前面的 4 是長邊放大為 4 倍的 4，後面的 4 是寬邊放大為 4 倍的 4。

步驟四：回到原問題，要求學生直接算出長方形乙的面積是長方形甲的  $4 \times 4$  倍。

7. 本學習內容限制在三角形及四邊形情境討論放大縮小對邊長及角度的影響；限制在正方形及長方形情境討論放大縮小對面積的影響。

題號	試題代碼				答案		
13	114-M6-C1-13				4		
學習重點	S-6-3 圓周率、圓周長、圓面積、扇形面積：用分割說明圓面積公式。求扇形弧長與面積。知道以下三個比相等：( 1 ) 圓心角：360；( 2 ) 扇形弧長：圓周長；( 3 ) 扇形面積：圓面積，但應用問題只處理用( 1 ) 求弧長或面積。  備註：由於圓周率取成 3.14，在計算時應以概念理解為原則，避免陷入複雜計算。可利用活動說明一般不規則區域的面積要如何理解和估計，但不評量。扇形面積與弧長只處理直接問題( 如已知幾分之幾圓或圓心角求面積或弧長 )，不處理逆推或過多推理步驟的問題( 屬於國中範圍，S-9-5 )。						
知識向度	空間與形狀		認知向度		概念理解		
題目	<p>如圖，扇形甲、扇形乙、扇形丙都是 <math>\frac{1}{6}</math> 圓。</p> <div></div> <p>下列關於甲、乙、丙這三個扇形「扇形弧長：圓周長」比值大小的敘述何者正確？</p> <p>① 扇形甲算出的比值最大 ② 扇形乙算出的比值最大 ③ 扇形丙算出的比值最大 ④ 扇形甲、扇形乙、扇形丙算出的比值都一樣大</p>						
選答率	選 項	1	2	3	4*	其他	通過率：70%
	全 體	0.18	0.05	0.08	0.70	0.00	
	高分組	0.08	0.00	0.02	0.90	0.00	鑑別度：0.44
	低分組	0.25	0.13	0.16	0.45	0.00	

## 一、試題分析

### (一) 評量目標

本題給定三個不同大小的 $\frac{1}{6}$ 圓，要求學生選出扇形弧長對圓周長比值的正確描述，評量學生是否理解圓心角：360 和扇形弧長：圓周長兩者比值相同。

### (二) 數據說明

1. 整體通過率 70%，高分組答對率 90%，低分組答對率 45%，鑑別度 0.44。
2. 70%的學生選擇正確答案④；18%的學生選擇①；5%的學生選擇②；8%的學生選擇③。

### (三) 選項及學生表現說明

1. 本題鑑別度為 0.44，正確答案為選項④，通過率為 70%，顯示七成的學生已理解圓心角：360 和扇形弧長：圓周長兩者比值相同。
2. 有 18%的學生選擇①（低分組有 25%），這些學生可能不理解圓心角：360 和扇形弧長：圓周長兩者比值相同，誤認為半徑比較大的圓其比值比較大。
3. 有 5%的學生選擇②（低分組有 13%），這些學生可能不理解圓心角：360 和扇形弧長：圓周長兩者比值相同。
4. 有 8%的學生選擇③（低分組有 16%），這些學生可能不理解圓心角：360 和扇形弧長：圓周長兩者比值相同，誤認為半徑比較小的圓其比值比較大。

## 二、對應學習重點

	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	S-3-3 圓：「圓心」、「圓周」、「半徑」與「直徑」。能使用圓規畫指定半徑的圓。 備註：知道圓心是認識圓的重要定義元素，但是圓心並不屬於圓。 S-5-3	S-6-3 圓周率、圓周長、圓面積、扇形面積：用分割說明圓面積公式。求扇形弧長與面積。知道以下三個比相等： (1) 圓心角：360； (2) 扇形弧長：圓周長； (3) 扇形面積：圓面積，但應用問題	S-9-5 圓弧長與扇形面積：以 $\pi$ 表示圓周率；弦、圓弧、弓形的意義；圓弧長公式；扇形面積公式。

	<p>扇形：扇形的定義。「圓心角」。扇形可視為圓的一部分。將扇形與分數結合（幾分之幾圓）。能畫出指定扇形。</p> <p>備註：扇形含圓心角大於 180 度的情況。理解如「圓心角 90 度的扇形是 <math>\frac{1}{4}</math> 圓」等的結論。畫出指定扇形包括「給定一圓，能畫出 <math>\frac{1}{3}</math> 圓、<math>\frac{1}{6}</math> 圓等扇形」、「畫出指定半徑與圓心角的扇形」。</p>	<p>只處理用 (1) 求弧長或面積。</p> <p>備註：由於圓周率取成 3.14，在計算時應以概念理解為原則，避免陷入複雜計算。可利用活動說明一般不規則區域的面積要如何理解和估計，但不評量。扇形面積與弧長只處理直接問題（如已知幾分之幾圓或圓心角求面積或弧長），不處理逆推或過多推理步驟的問題（屬於國中範圍，S-9-5）。</p>	
--	---	--	--

### 三、教學建議

#### (一) 錯誤類型的可能原因

1. 學生可能不理解圓心角：360 和扇形弧長：圓周長兩者比值相同。
2. 題目沒有給定圓周長或半徑，學生無法算出  $\frac{1}{6}$  圓的弧長和圓的圓周長，因此無法解題。

#### (二) 核心概念與本題的教學重點

1. 圓周率的率指的是比率，比率相等指的是所有的圓都相似，也就是說，所有的圓，其圓周長和直徑的比、圓周長和半徑的比以及直徑和半徑的比都相等。  
圓的周長是曲線，不易測量其長度，而圓的直徑是直線，比較容易測量，因此只要知道「圓周長：直徑長」的比值，測量出直徑後就能算出圓的周長，數學上稱「圓周長：直徑長」的比值為圓周率。

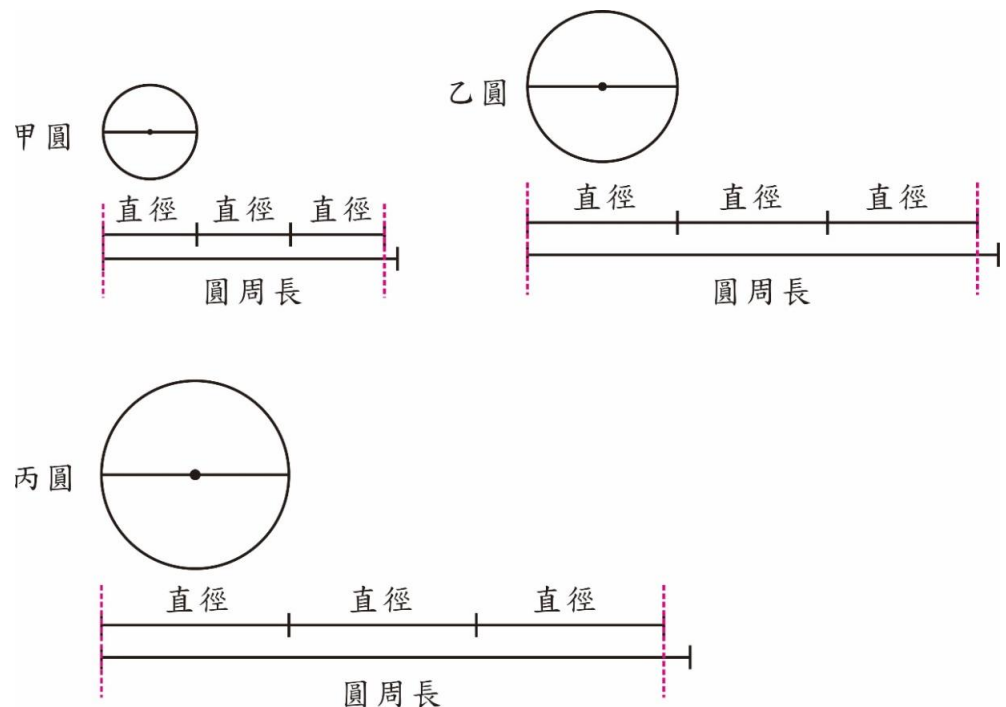
下面說明如何幫助學生掌握圓周率的意義：

教師先給定 3 個大小不同的圓，再提供兩種方法，幫助學生認識圓周長比直徑的 3 倍還要長一點，為後面引入圓周率的近似值 3.14 鋪路。

方法一：觀察給定三個圓的圓周長和 3 倍直徑長的長短關係

教師分別畫出這 3 個圓的圓周長以及直徑長的 3 倍，要求學生觀察這些圓的圓周長和 3 倍直徑長，幫助學生認識圓周長比直徑的 3 倍還長一點，為後面引入圓周率的近似值 3.14 鋪路。

如下所示：



方法二：比較三個圓「圓周長÷直徑長」商的大小關係

教師給定三個圓的圓周和直徑的長度，以及「圓周長÷直徑長」的商（商數以四捨五入法取概數到百分位），幫助學生認識「圓周長÷直徑長」的商都比 3 大一點，為後面引入圓周率的近似值 3.14 鋪路。

如下所示：

	圓周長 (公分)	直徑長 (公分)	圓周長÷直徑長 (四捨五入到百分位)
甲圓	56.5	18	3.14
乙圓	38.0	12	3.17
丙圓	72.5	23	3.15

教師應同時提供兩種方法，幫助學生認識「圓周長÷直徑長」的商都比 3 大一點。第一種方法是比的想法，學生可以同時看到圓周長和直徑 3 倍長的關係；第二種方法是比值的想法，學生可能只將注意力放在「圓周長÷直徑長」的商，而無法察覺圓周長和直徑 3 倍長的關係。

2. 教師提供學生實測圓周長和直徑長的解題經驗時，為了讓「圓周長：直徑長」的比值不要差異太大，建議選擇直徑超過 20 公分的圓，因為直徑太小的圓，算出來圓周率的值誤差比較大。
3. 選擇 3.14 為圓周率的近似值，學生在計算圓面積或周長時常發生錯誤，本學習內容建議教師可以選擇 3 為圓周率的近似值。

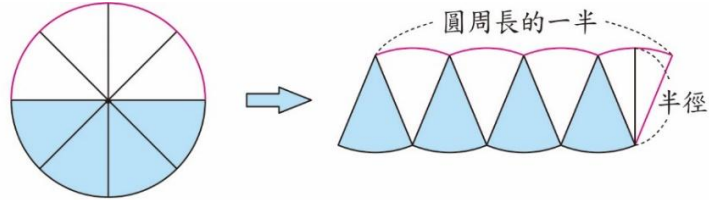
4. 「圓周長÷直徑長 = 圓周率 (  $\frac{\text{圓周長}}{\text{直徑}} = \text{圓周率}$  ) 」和「圓周長 = 直徑長×3.14」是相同的關係，只記憶其中一個公式，就能導出另一個公式。

前者較容易幫助學生認識圓周率的意義，而後者只幫助學生記憶圓周率是 3.14。建議教師教學時，宜強調「圓周長÷直徑長 = 圓周率(3.14)」，幫助學生掌握圓周率的意義，不宜只強調「圓周長 = 直徑長×3.14」。

5. 圓周率是無理數，而利用直尺測量出的圓周長及直徑都是有理數，「有理數÷有理數」還是有理數，為了不妨礙以後無理數概念的發展，建議教師提供一些簡單說明圓周率的文章（數學史），讓有興趣的學生自行閱讀。

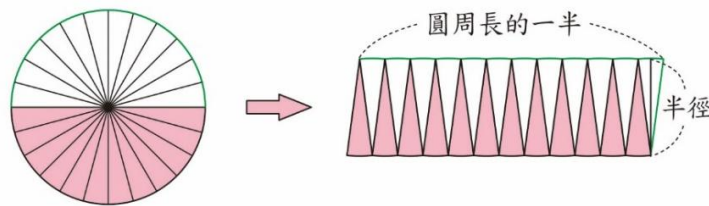


6. 先將圓切成兩個半圓，再將兩個半圓都切成很多個全等的扇形，將這兩個切成扇形的半圓上下交錯疊合起來，會變成一個接近平行四邊形（或長方形）的圖形，平行四邊形的底（長方形的長）是圓周長的一半，平行四邊形的高（長方形的寬）是圓的半徑，可以透過平行四邊形（長方形）面積求出圓面積。



把一個圓等分割成八等分

重新組合被等分割的圓



把一個圓等分割成二十四等分

重新組合被等分割的圓

圓面積 = 平行四邊形面積

$$= \text{底} \times \text{高}$$

$$= \text{圓周長的一半} \times \text{半徑}$$

$$= (\text{直徑} \times 3.14) \div 2 \times \text{半徑}$$

$$= (\text{直徑} \div 2 \times 3.14) \times \text{半徑}$$

$$= \text{半徑} \times \text{半徑} \times 3.14$$

7. 以「半徑 10 公分、圓心角 36 度的扇形面積是多少平方公分？」為例，提供兩種解題的方法。

- (1) 以幾分之幾圓的想法來解題。

$$36 \div 360 = \frac{1}{10}, (10 \times 10 \times 3.14) \times \frac{1}{10} = 31.4, \text{答：} 31.4 \text{ 平方公分。}$$

- (2) 以 1 度圓心角對應的扇形面積為單位來解題。

$$(10 \times 10 \times 3.14) \times \frac{36}{360} = 31.4, \text{答：} 31.4 \text{ 平方公分。}$$

學生較容易掌握第(1)種方法解題的意義。

題號	試題代碼				答案		
14	114-M6-B1-14				2		
學習重點	N-5-16 解題：時間的乘除問題。在分數和小數學習的範圍內，解決與時間相關的乘除問題。  備註：含以分數和小數表示的時間量。如 15 分是 $\frac{1}{4}$ 時( $\frac{15}{60}=\frac{1}{4}$ )； $\frac{1}{5}$ 時是 12 分( $60\times\frac{1}{5}=12$ )。可含工程問題。						
知識向度	量與實測		認知向度		概念理解		
題目	有 120 箱新書，只用大推車搬運，要 10 趟才能搬完，只用小推車搬運，要 15 趟才能搬完。 如果一趟用大推車和小推車各 1 輛一起搬運，至少要多少趟才能搬完？  ① 5 ② 6 ③ 8 ④ 12						
選答率	選 項	1	2*	3	4	其他	通過率：64%
	全 體	0.17	0.64	0.11	0.08	0.00	
	高分組	0.06	0.91	0.02	0.02	0.00	鑑別度：0.60
	低分組	0.28	0.31	0.23	0.17	0.01	

一、試題分析

(一) 評量目標

本題給定待運量及大、小兩推車搬運的次數，要求學生算出大小兩推車一起搬運的次數，評量學生工程問題解題的能力。

(二) 數據說明

1. 整體通過率 64%，高分組答對率 91%，低分組答對率 31%，鑑別度 0.6。

2. 64%的學生選擇正確答案②；17%的學生選擇①；11%的學生選擇③；8%的學生選擇④。

### (三) 選項及學生表現說明

1. 本題鑑別度為 0.6，正確答案為選項②，通過率為 64%，顯示超過六成的學生已具備解決給定搬運量工程問題解題的能力。
2. 有 17%的學生選擇①（低分組有 28%），這些學生可能尚未具備解決給定搬運量工程問題解題的能力，這些學生利用平分的想法，透過  $120 \div (10 + 15) = 4.8$ ， $4.8 \approx 5$ ，算出至少要 5 趟。
3. 有 11%的學生選擇③（低分組有 23%），這些學生可能尚未具備解決給定搬運量工程問題解題的能力，這些學生利用平分的想法，透過  $120 \div 15 = 8$ ，算出至少要 8 趟。
4. 有 8%的學生選擇④（低分組有 17%），這些學生可能尚未具備解決給定搬運量工程問題解題的能力，這些學生利用平分的想法，透過  $120 \div 10 = 12$ ，算出至少要 12 趟。

### 二、對應學習重點

	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	<p>N-4-13</p> <p>解題：日常生活的時間加減問題。跨時、跨午、跨日、24 小時制。含時間單位換算。</p> <p>備註：教學須包含各種類型的時間加減問題。建議不直接談時差，與時差有關問題，可在布題時先處理。</p>	<p>N-5-16</p> <p>解題：時間的乘除問題。在分數和小數學習的範圍內，解決與時間相關的乘除問題。</p> <p>備註：含以分數和小數表示的時間量。如 15 分是 <math>\frac{1}{4}</math> 時 (<math>\frac{15}{60} = \frac{1}{4}</math>)；<math>\frac{1}{5}</math> 時是 12 分 (<math>60 \times \frac{1}{5} = 12</math>)。可含工程問題。</p>	<p>N-6-7</p> <p>解題：速度。比和比值的應用。速度的意義。能做單位換算（大單位到小單位）。含不同時間區段的平均速度。含「距離 = 速度 × 時間」公式。用比例思考協助解題。</p> <p>備註：除不同時間區段的平均速度問題外，小學速度問題的假設都是等速運動。含速度固定，時間為幾倍，距離即為幾倍的問題。含時間固定，速度為幾倍，距離即</p>

				為幾倍的問題。所謂「大單位到小單位」，指的是不論是長度或時間，都只做大單位到小單位的換算。	
--	--	--	--	---	--

### 三、教學建議

#### (一) 錯誤類型的可能原因

1. 學生可能不具備解決給定搬運量工程問題解題的能力。
2. 學生可能不理解或誤解題意，利用平分的概念解題。

#### (二) 核心概念與本題的教學重點

以「有一件馬路工程全長 36 公尺，甲工程隊施工 12 天完工，乙工程隊施工 18 天完工；甲、乙兩個工程隊一起合作，多少天可以完成這件工程？」為例，引導學生透過下列步驟解題。

步驟一：算出甲工程隊 1 天施工的長度。

$$36 \div 12 = 3, \text{ 甲工程隊 1 天施工 3 公尺。}$$

步驟二：算出乙工程隊 1 天施工的長度。

$$36 \div 18 = 2, \text{ 乙工程隊 1 天施工 2 公尺。}$$

步驟三：算出甲工程隊和乙工程隊一起合作 1 天施工的長度。

$$3 + 2 = 5, \text{ 甲工程隊和乙工程隊一起合作 1 天施工 5 公尺。}$$

步驟四：算出甲工程隊和乙工程隊一起合作完成整件工程所需的天數。

$$36 \div 5 = 7.2, \text{ 7.2 天可以完成這件工程。}$$

題號	試題代碼				答案	
15	114-M6-A1-15				2	
學習重點	N-6-1 20 以內的質數和質因數分解：小於 20 的質數與合數。2、3、5 的質因數判別法。以短除法做質因數的分解。 備註：被分解數的因數，在扣除 2、3、5 或其次方的部分後、只剩一因數，且此數除了 49、77 或 91 之外，只能是 11、13、17 或 19。					
知識向度	數與計算		認知向度		概念理解	
題目	<p>下面是用短除法將整數 <math>A</math> 做質因數分解的結果。</p> <div><div>7</div><div><div>A</div><div><div>B</div><div>30</div><div><div>D</div><div>C</div><div>E</div></div></div></div></div> <p>下列何者<u>不是</u> <math>A</math> 的因數？</p> <p>① <math>B \times D \times E</math></p> <p>② <math>C \times D \times E</math></p> <p>③ <math>7 \times D \times E</math></p> <p>④ <math>7 \times B \times D \times E</math></p>					
選答率	選 項	1	2*	3	4	其他
	全 體	0.08	0.49	0.14	0.29	0.00
	高分組	0.02	0.72	0.04	0.22	0.00
	低分組	0.16	0.29	0.24	0.30	0.00
通過率：49%						
鑑別度：0.43						
一、試題分析						
(一) 評量目標						
本題給定一數利用短除法求質因數分解的結果，要求學生選出不是該數因數的選項，評量學生利用短除法做質因數分解及判斷質因數分解算式的因數的能力。						

## (二) 數據說明

1. 整體通過率 49%，高分組答對率 72%，低分組答對率 29%，鑑別度 0.43。
2. 49%的學生選擇正確答案②；8%的學生選擇①；14%的學生選擇③；29%的學生選擇④。

## (三) 選項及學生表現說明

1. 本題鑑別度為 0.43，正確答案為選項②，通過率為 49%，顯示近五成的學生已能具備利用短除法做質因數分解的能力；這些學生也具備判斷哪些算式是質因數分解算式的因數的能力。
2. 有 8%的學生選擇①（低分組有 16%），這些學生可能不具備利用短除法做質因數分解的能力；也不具備判斷哪些算式是質因數分解算式的因數的能力。
3. 有14%的學生選擇③（低分組有24%），這些學生可能不具備利用短除法做質因數分解的能力；也不具備判斷哪些算式是質因數分解算式的因數的能力。
4. 有 29%的學生選擇④（低分組有 30%），這些學生可能不具備利用短除法做質因數分解的能力；也不具備判斷哪些算式是質因數分解算式的因數的能力；這些學生可能誤解題意，選出是 A 的因數。

## 二、對應學習重點

	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	N-5-3 公因數和公倍數：因數、倍數、公因數、公倍數、最大公因數、最小公倍數的意義。 備註：以概念認識為主，不用短除法( N-6-1、N-6-2 )。	N-6-1 20 以內的質數和質因數分解：小於 20 的質數與合數。2、3、5 的質因數判別法。以短除法做質因數的分解。 備註：被分解數的因數，在扣除 2、3、5 或其次方的部分後、只剩一因數，且此數除了 49、77 或 91 之外，	N-6-2 最大公因數與最小公倍數：質因數分解法與短除法。兩數互質。運用到分數的約分與通分。 備註：不做三數的最大公因數與最小公倍數。應包含練習將分數化成最簡分數的問題。

		只能是 11、13、17 或 19。	
--	--	--------------------	--

### 三、教學建議

#### (一) 錯誤類型的可能原因

1. 學生可能不具備利用短除法做質因數分解的能力。
2. 學生可能不具備判斷哪些算式是質因數分解算式因數的能力，不知道  
 $A = 7 \times B \times D \times E$  時， $A$  的因數有 1、7、 $B$ 、 $D$ 、 $E$ 、 $7 \times B$ 、 $7 \times D$ 、 $7 \times E$ 、 $B \times D$ 、 $B \times E$ 、 $D \times E$ 、 $7 \times B \times D$ 、 $7 \times B \times E$ 、 $7 \times D \times E$ 、 $B \times D \times E$ 、 $7 \times B \times D \times E$ 。
3. 學生可能誤解題意，選出是  $A$  的因數。

#### (二) 核心概念與本題的教學重點

1. 以「 $60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$ 」為例，五年級的教學重點是看著數字 60 找出 60 的因數及倍數，六年級的教學重點是看著質因數分解的算式  $2 \times 2 \times 3 \times 5$  找出 60 的因數及倍數。
2. 國小和國中階段都幫助學生用短除法做質因數的分解，差別是國小階段質因數分解的算式用連乘積來表示，國中階段質因數分解的算式用指數來表示。
3. 以將 24 分解為質因數的乘積為例，部分教師認為樹狀圖法和短除法是兩種不同的解題方法，其實不然，短除法只是讓樹狀圖法更有效率的方法。  
 建議教師先引入樹狀圖法，幫助學生將 24 分解成質因數的乘積，再要求學生利用短除法逐一的提出質因數，幫助學生發現短除法可以更有效率的將給定數質因數分解。
4. 教師可以透過「把 24 分解成幾個大於 1 整數相乘的算式」，依下列步驟，將 24 質因數分解。

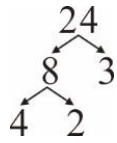
步驟一：透過樹狀圖，將 24 分解成 8 和 3 的乘積，並記成  $24 = 8 \times 3$ 。



步驟二：3 不可以分解成 2 個大於 1 整數相乘的算式。

此時，教師可以說明，不能分解成 2 個大於 1 整數相乘的數，它們的因數只有 1 和自己，所以不能分解成 2 個大於 1 整數相乘的數是質數。

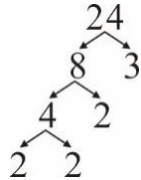
步驟三：透過樹狀圖，將 8 分解成 4 和 2 的乘積，並記成  $24 = 8 \times 3 = 4 \times 2 \times 3$



步驟四：2 不可以分解成 2 個大於 1 整數相乘的算式。

步驟五：透過樹狀圖將 4 分解成 2 和 2 乘積，並記成

$$24 = 8 \times 3 = 4 \times 2 \times 3 = 2 \times 2 \times 2 \times 3。$$



步驟六：稱把 24 分解成  $24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$  的過程為質因數分解。

2 和 3 都是質數，2 和 3 也是 24 的因數，稱 2 和 3 是 24 的質因數。

5. 以「將 24 質因數分解」為例，學生透過樹狀圖，可以有很多不同的分法。

教師應幫助學生理解，如果將質因數由小至大排列，上面的記法都可以記成

$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$ ，為國中引入質因數的標準分解式鋪路。

教師在課堂活動中，可以要求學生質因數分解後，將質因數由小至大排列，但是評量時，應接受所有合理的記法。

6. 學生有透過樹狀圖，將給定數分解成質因數乘積的經驗後，教師可以幫助學生利用短除法，逐一的提出質因數，幫助學生較有效率的進行質因數分解。

以「將 24 質因數分解」為例，說明如何幫助學生解題：

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 24} \\ 2 \overline{) 12} \\ 2 \overline{) 6} \\ 3 \end{array}$$

步驟一：先提出質因數 2，將 24 記成  $24 = 2 \times 12$

步驟二：再提出質因數 2，將 24 記成  $24 = 2 \times 2 \times 6$

步驟三：再提出質因數 2，將 24 記成  $24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$

步驟四：3 是質因數，可以得到  $24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$ 。

步驟五：直接透過短除法將 24 記成  $24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$ 。



7. 下面以「 $2 \times 3$ 、 $2 \times 5$ 、 $3 \times 5$  和  $2 \times 3 \times 5$  是 30 的因數嗎？」為例，說明如何幫助學生發現「一數質因數分解後，任選質因數分解結果中某部分的質因數或質因數乘積，都會是該數的因數」，為後續引入質因數分解法求最大公因數及短除法求最大公因數鋪路。下面提出兩種幫助學生解題的方法：

方法一：建議教師依下列步驟幫助學生解題

步驟一：教師列出  $30 = 2 \times 3 \times 5$  的所有因數 1、2、3、5、 $2 \times 3$ 、 $2 \times 5$ 、 $3 \times 5$  和  $2 \times 3 \times 5$  都是  $2 \times 3 \times 5$  的所有因數。

步驟二：幫助學生察覺除了 1 以外，其他的因數都是  $2 \times 3 \times 5$  中部分質因數的乘積。

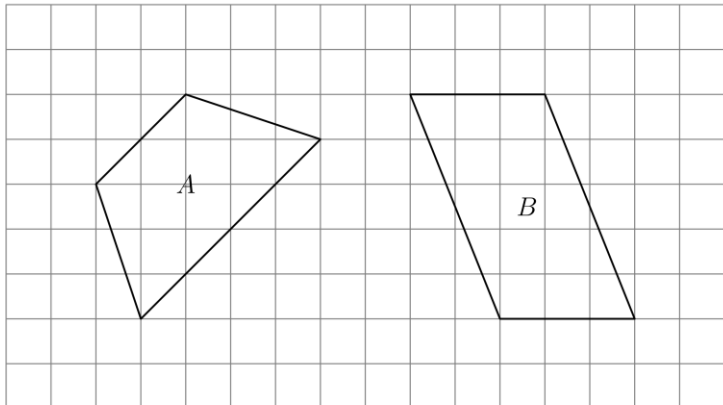
步驟三： $30 = 2 \times 3 \times 5$ ， $2 \times 3$ 、 $2 \times 5$ 、 $3 \times 5$  和  $2 \times 3 \times 5$  都是  $2 \times 3 \times 5$  中部分質因數的乘積，所以  $2 \times 3$ 、 $2 \times 5$ 、 $3 \times 5$  和  $2 \times 3 \times 5$  都是 30 的因數。

方法二：建議教師依下列步驟幫助學生解題

步驟一：複習活動，利用五年級學過的方法找出 30 所有的因數。30 的因數有：1、2、3、5、6、10、15、30。

步驟二： $2 \times 3 = 6$ 、 $2 \times 5 = 10$ 、 $3 \times 5 = 15$ 、 $2 \times 3 \times 5 = 30$ ，所以  $2 \times 3$ 、 $2 \times 5$ 、 $3 \times 5$  和  $2 \times 3 \times 5$  都是 30 的因數。

步驟三：將 30 質因數分解後得到  $30 = 2 \times 3 \times 5$ ，列出： $2 \times 3$  是  $2 \times 3 \times 5$  的因數； $2 \times 5$  是  $2 \times 3 \times 5$  的因數； $3 \times 5$  是  $2 \times 3 \times 5$  的因數； $2 \times 3 \times 5$  是  $2 \times 3 \times 5$  的因數。幫助學生察覺  $2 \times 3$ 、 $2 \times 5$ 、 $3 \times 5$  和  $2 \times 3 \times 5$  都是  $2 \times 3 \times 5$  中，部分質因數的乘積。

題號	試題代碼			答案			
16	114-M6-C1-16			1			
學習重點	S-5-4 線對稱：線對稱的意義。「對稱軸」、「對稱點」、「對稱邊」、「對稱角」。由操作活動知道特殊平面圖形的線對稱性質。利用線對稱做簡單幾何推理。製作或繪製線對稱圖形。  備註：從操作活動察覺正三角形、等腰三角形、正方形、長方形、菱形、箏形（箏形指圖形，名詞不出現）、等腰梯形是線對稱圖形（避免告知）。在教學呈現時，線對稱軸應為垂直或平行（操作活動不在此限）。可處理正多邊形。						
知識向度	空間與形狀	認知向度	概念理解				
題目	<p>下列圖形中，哪些圖形是線對稱圖形？</p> <div></div> <p>① 只有 A ② 只有 B ③ A 和 B 都是 ④ A 和 B 都不是</p>						
選答率	選 項	1*	2	3	4	其他	通過率：38%
	全 體	0.38	0.23	0.29	0.09	0.00	
	高分組	0.62	0.14	0.19	0.05	0.00	鑑別度：0.43
	低分組	0.19	0.32	0.34	0.14	0.00	

## 一、試題分析

### (一) 評量目標

本題給定兩個在平方公分板上的四邊形，要求學生判斷哪些圖形是線對稱圖形評量學生辨識線對稱圖形的能力。

### (二) 數據說明

1. 整體通過率 38%，高分組答對率 62%，低分組答對率 19%，鑑別度 0.43。
2. 38%的學生選擇正確答案①；23%的學生選擇②；29%的學生選擇③；9%的學生選擇④。

### (三) 選項及學生表現說明

1. 本題鑑別度為0.43，正確答案為選項①，通過率為38%，顯示近四成的學生已具備辨識線對稱圖形的能力。
2. 有 23%的學生選擇②（低分組有 32%），這些學生可能尚未具備辨識線對稱圖形的能力；也可能沒有透過操作活動檢驗平行四邊形不是線對稱圖形的解題經驗，直觀的認為平行四邊形是線對稱圖形。
3. 有 29%的學生選擇③（低分組有 34%），這些學生可能尚未具備辨識線對稱圖形的能力；也可能沒有透過操作活動檢驗平行四邊形不是線對稱圖形的解題經驗，直觀的認為平行四邊形是線對稱圖形。
4. 有 9%的學生選擇④（低分組有 14%），這些學生可能尚未具備辨識線對稱圖形的能力；也可能因為無法具體操作，認為梯形不是線對稱圖形。

## 二、對應學習重點

	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	S-4-7 三角形：以邊與角的特徵認識特殊三角形並能作圖。如正三角形、等腰三角形、直角三角形、銳角三角形、鈍角三角形。	S-5-4 線對稱：線對稱的意義。「對稱軸」、「對稱點」、「對稱邊」、「對稱角」。由操作活動知道特殊平面圖形的線對稱性質。利用線對稱做簡單幾何推	S-7-4 線對稱的性質：對稱線段等長；對稱角相等；對稱點的連線段會被對稱軸垂直平分。

		理。製作或繪製線對稱圖形。 備註：從操作活動察覺正三角形、等腰三角形、正方形、長方形、菱形、箏形(箏形指圖形，名詞不出現)、等腰梯形是線對稱圖形(避免告知)。在教學呈現時，線對稱軸應為垂直或平行(操作活動不在此限)。可處理正多邊形。	
--	--	---	--

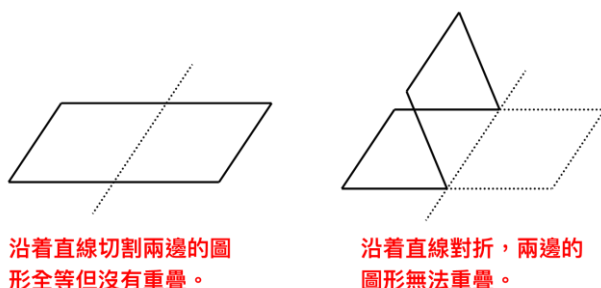
### 三、教學建議

#### (一) 錯誤類型的可能原因

1. 學生可能不具備辨識線對稱圖形的能力。
2. 學生可能沒有透過操作活動檢驗平行四邊形不是線對稱圖形的解題經驗，直觀的認為平行四邊形是線對稱圖形。
3. 學生可能因為無法具體操作，認為梯形不是線對稱圖形。

#### (二) 核心概念與本題的教學重點

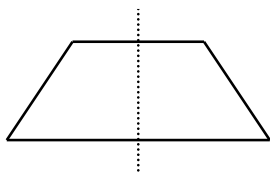
1. 因為平行四邊形，兩雙對邊互相平行，所以部分學生誤認為平行四邊形也是線對稱圖形，如下圖。



教師應該提供學生對摺平行四邊形的實際操作，來判斷是否可能重合的經驗。當學生有了這樣的一個經驗之後，此題就就不會出差錯。若是教師以宣告的方式

告知平行四邊形不是對稱圖形，學生有可能忘記，因而受到兩雙對邊平行的影響，認為平行四邊形就是線對稱圖形。

2. 面對等腰梯形時，將圖形擺正，學生就很容易看出它是一個線對稱圖形，而且容易找出對稱軸（如下圖）。



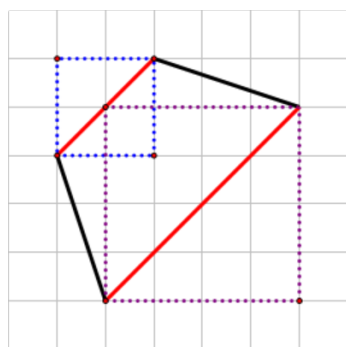
但是若將等腰梯形轉個方向，學生可能就不容易看出它也是對線對稱圖形。

3. 此題是在方格中展示斜放的梯形，學生可能無法判斷梯形的兩邊是等長。這時建議老師們利用方格的對角線，讓學生看出等長的現象。

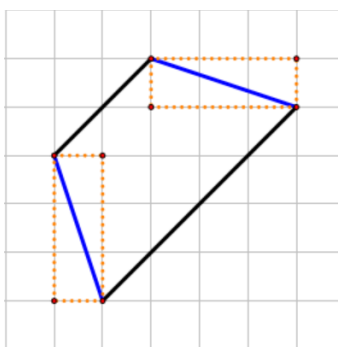
下方圖一的兩條紅色線段都是大小正方形的對角線，所以是互相平行，因此可以證明是一個梯形。

下方圖二的兩條藍色線段都是  $1 \times 3$  的長方形之對角線，所以此兩條藍色線段是等長的。

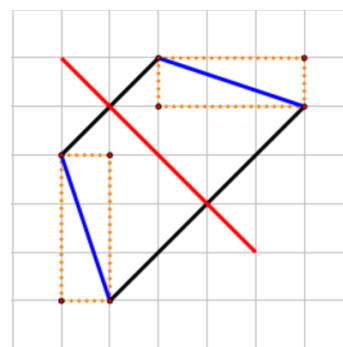
下方圖三的紅色線段就是這個等腰梯形的對稱軸。



圖一

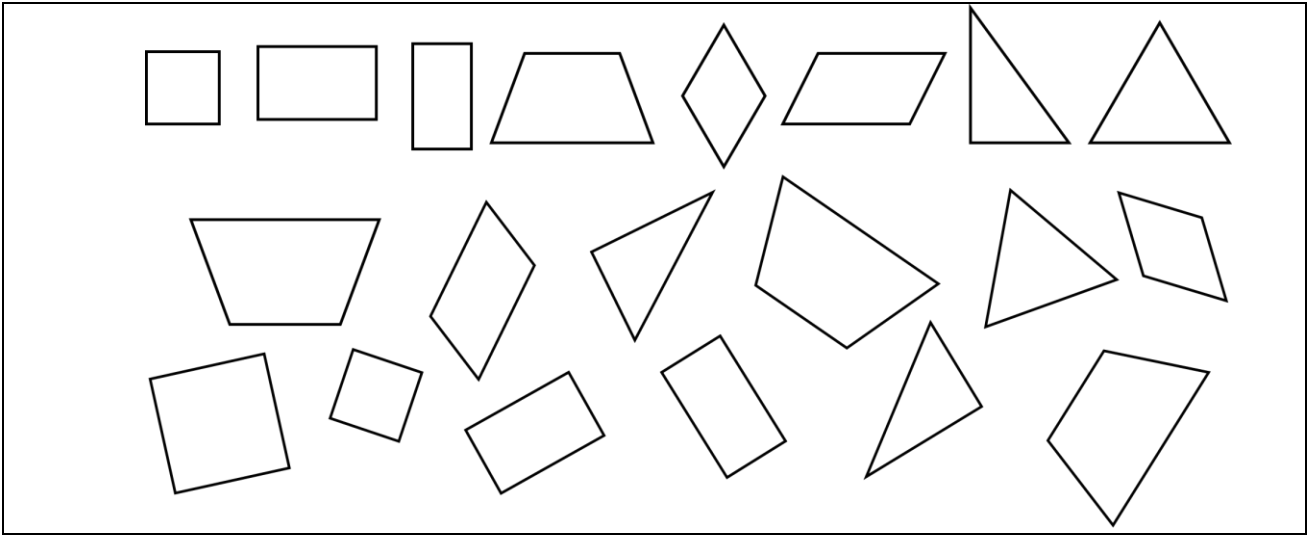


圖二



圖三

4. 建議教師在教線對稱圖形或各種圖形辨認時，不要全都將圖形進行正向的擺放，應適時將圖形做各種不同方向的擺放，讓學生能利用實際運用圖形的性質進行圖形的辨認，這有助於加深學生對圖形概念的理解。如下圖：



題號	試題代碼					答案	
17	114-M6-A1-17					1	
學習重點	N-6-2 最大公因數與最小公倍數：質因數分解法與短除法。兩數互質。運用到分數的約分與通分。 備註：不做三數的最大公因數與最小公倍數。應包含練習將分數化成最簡分數的問題。						
知識向度	數與計算		認知向度		概念理解		
題目	下列是甲、乙、丙三人關於互質的說法。 甲說： $a$ 和 $b$ 是二個不相等的合數， $a$ 和 $b$ 一定不會互質。 乙說： $a$ 和 $b$ 兩整數互質時， $a$ 和 $b$ 的公因數只有 1 個。 丙說： $a$ 和 $b$ 兩整數互質時， $a \times b$ 是 $a$ 和 $b$ 的最小公倍數。 請問誰的說法 <u>錯誤</u> ？  ① 甲 ② 乙 ③ 丙 ④ 三人都正確						
選答率	選 項	1*	2	3	4	其他	通過率：50%
	全 體	0.50	0.15	0.15	0.19	0.00	
	高分組	0.72	0.05	0.04	0.19	0.00	鑑別度：0.45
	低分組	0.27	0.27	0.25	0.21	0.01	
一、試題分析							
(一) 評量目標							
本題給定三種關於互質的說法，要求學生選出錯誤的說法，評量學生是否掌握兩數互質的概念。							
(二) 數據說明							
1. 整體通過率 50%，高分組答對率 72%，低分組答對率 27%，鑑別度 0.45。							
2. 50%的學生選擇正確答案①；15%的學生選擇②；15%的學生選擇③；19%的學生選擇④。							

### (三) 選項及學生表現說明

1. 本題鑑別度為 0.45，正確答案為選項①，通過率為 50%，顯示五成的學生已具備利用兩數互質概念解題的能力，知道兩數互質時，兩數的公因數只有 1 個、最小公倍數是兩數的乘積；這些學生也知道兩個合數可能互質。
2. 有 15%的學生選擇②（低分組有 27%），這些學生可能不具備利用兩數互質概念解題的能力，這些學生誤以為兩數都是合數時，這兩數一定不會互質（8 和 9 都是合數，但是 8 和 9 互質）；這些學生也不知道兩數互質時，最大公因數只有 1 個。
3. 有 15%的學生選擇③（低分組有 25%），這些學生可能不具備利用兩數互質概念解題的能力，這些學生誤以為兩數都是合數時，這兩數一定不會互質（8 和 9 都是合數，但是 8 和 9 互質）；這些學生也不知道兩數互質時，最小公倍數是兩數的乘積。
4. 有 19%的學生選擇④（低分組有 21%），這些學生可能不具備利用兩數互質概念解題的能力，這些學生誤以為兩數都是合數時，這兩數一定互質（8 和 9 都是合數，但是 8 和 9 互質）。

### 二、對應學習重點

	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	N-6-1 20 以內的質數和質因數分解：小於 20 的質數與合數。2、3、5 的質因數判別法。以短除法做質因數的分解。 備註：被分解數的因數，在扣除 2、3、5 或其次方的部分後、只剩一因數，且此數除了 49、77 或 91 之外，	N-6-2 最大公因數與最小公倍數：質因數分解法與短除法。兩數互質。運用到分數的約分與通分。 備註：不做三數的最大公因數與最小公倍數。應包含練習將分數化成最簡分數的問題。	N-7-2 質因數分解的標準分解式：質因數分解的標準分解式，並能用於求因數及倍數的問題。



	只能是 11、13、17 或 19。		
--	--------------------	--	--

### 三、教學建議

#### (一) 錯誤類型的可能原因

1. 學生可能不具備利用兩數互質概念解題的能力。
2. 學生可能不知道兩數互質時，兩數的公因數只有 1 個。
3. 學生可能不知道兩數互質時，最小公倍數是兩數的乘積。
4. 學生可能誤以為兩數都是合數時，兩數一定不會互質 ( 8 和 9 都是合數，但是 8 和 9 互質 )。

#### (二) 核心概念與本題的教學重點

1. 區分「質數」和「互質」的差異。

質數：質數討論的是一個數的性質，判斷該數是否滿足只有 1 和自己兩個因數的條件。

互質：互質討論的是  $a$ 、 $b$  兩個數的關係，當  $(a, b) = 1$ ，數學上稱  $a$  和  $b$  互質。

例如：1 不是質數，但是  $(1, 6) = 1$ ，所以 1 和 6 互質。

2. 利用短除法求兩數的最大公因數及最小公倍數時，「兩數互質」是判斷短除法運算是否結束的依據，例如用短除法求 36 和 48 兩數的最大公因數或最小公倍數時，先提出共同的質因數後，發現剩下的兩數沒有共同的質因數時，就能確定最大公因數「 $2 \times 2 \times 3$ 」就是共同質因數的乘積，最小公倍數「 $2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 4 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2$ 」是「共同質因數乘積  $2 \times 2 \times 3$ 」和「剩下質因數乘積  $3 \times 4 = 3 \times 2 \times 2$ 」的乘積。

$$\begin{array}{rcl}
 2 & \overline{) \begin{array}{cc} 36 & 48 \end{array}} & \Rightarrow 2 \text{ 是共同的質因數。} \\
 2 & \overline{) \begin{array}{cc} 18 & 24 \end{array}} & \Rightarrow 2 \text{ 是共同的質因數。} \\
 3 & \overline{) \begin{array}{cc} 9 & 12 \end{array}} & \Rightarrow 3 \text{ 是共同的質因數。} \\
 & \begin{array}{cc} 3 & 4 \end{array} & \Rightarrow \text{沒有其它共同的質因數。}
 \end{array}$$

此時教師可以給兩數互質下定義，甲、乙兩數沒有共同的質因數，數學上稱甲、乙兩數互質。

甲、乙兩數互質時，甲、乙兩數的最大公因數 1，所以甲、乙兩數的最大公因數是 1 時，數學上也稱甲、乙兩數互質。

3. 以「找出 18 和 24 的最小公倍數」為例，說明如何利用短除法求兩數的最小公倍數。

步驟一：複習質因數分解法求兩數的最小公倍數，18 和 24 的最小公倍數

「 $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$ 」是「共同質因數乘積  $2 \times 3$ 」和「剩下質因數乘積  $2 \times 2 \times 3$ 」的乘積。

步驟二：2 是 18 和 24 共同的質因數，提出質因數 2，

得到  $18 = 2 \times 9$ ， $24 = 2 \times 12$ 。

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 18 \quad 24} \\ \underline{9 \quad 12} \end{array}$$

步驟三：3 也是 18 和 24 共同的質因數，提出質因數 3，

得到  $18 = (2 \times 3) \times 3$ ， $24 = (2 \times 3) \times 4$

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 18 \quad 24} \\ 3 \overline{) 9 \quad 12} \\ \underline{3 \quad 4} \end{array}$$

步驟四：3 和 4 互質，沒有共同的質因數。

步驟五：幫助學生認識下面的 4 可以質因數分解成  $2 \times 2$ 。

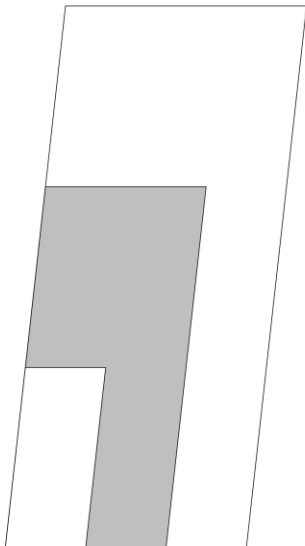
「共同質因數的乘積  $2 \times 3$ 」，是短除法左邊兩個質因數的乘積。

「剩下質因數乘積  $3 \times 2 \times 2 = 3 \times 4$ 」，是短除法下面兩數的乘積。

步驟六：最小公倍數是「共同質因數乘積」和「剩下質因數乘積」的乘積，

只要將左邊的質因數 2、3，和下面的數字 3、4 相乘，就能得到

最小公倍數  $= (2 \times 3) \times (3 \times 4)$ 。

題號	試題代碼				答案		
18	114-M6-C2-18				2		
學習重點	S-6-1 放大與縮小：比例思考的應用。「幾倍放大圖」、「幾倍縮小圖」。知道縮放時，對應角相等，對應邊成比例。 備註：知道常見平面圖形的縮放仍然是同一類圖形(含圓)，並能說明其原因。						
知識向度	空間與形狀		認知向度		程序執行		
題目	<p>四邊形甲是底 20 公分、高 45 公分的平行四邊形，四邊形乙是四邊形甲的 2 倍放大圖，四邊形丙是四邊形甲的 3 倍放大圖。將四邊形丙、四邊形乙和四邊形甲疊合成下圖，請問塗色面積是多少平方公分？</p>  <p>① 3600 ② 2700 ③ 1800 ④ 900</p>						
選答率	選 項	1	2*	3	4	其他	通過率：45%
	全 體	0.16	0.45	0.22	0.16	0.00	
	高分組	0.10	0.72	0.10	0.08	0.00	鑑別度：0.46
	低分組	0.21	0.26	0.31	0.22	0.01	

## 一、試題分析

### (一) 評量目標

本題給定平行四邊形甲的底和高以及甲和甲的 2 倍和 3 倍放大圖三圖形疊合的圖形，要求學生算出塗色圖形的面積，評量學生是否掌握平面圖形放大、縮小對長度及面積的影響。

### (二) 數據說明

1. 整體通過率 45%，高分組答對率 72%，低分組答對率 26%，鑑別度 0.46。
2. 45%的學生選擇正確答案②；16%的學生選擇①；22%的學生選擇③；16%的學生選擇④。

### (三) 選項及學生表現說明

1. 本題鑑別度為 0.46，正確答案為選項②，通過率為 45%，顯示四成五的學生已掌握平面圖形放大、縮小對長度及面積的影響。
2. 有 16%的學生選擇①（低分組有 21%），這些學生可能尚未掌握平面圖形放大、縮小對長度及面積的影響；也可能誤解題意，算出 2 倍放大圖的面積。
3. 有 22%的學生選擇③（低分組有 31%），這些學生可能尚未掌握平面圖形放大、縮小對長度及面積的影響，以為 2 倍放大圖的面積是原圖形面積的 2 倍。
4. 有 16%的學生選擇④（低分組有 22%），這些學生可能尚未掌握平面圖形放大、縮小對長度及面積的影響；也可能誤解題意，算出平行四邊形甲的面積。

## 二、對應學習重點

	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	N-5-10 解題：比率與應用。整數相除的應用。含「百分率」、「折」、「成」。 備註：本條目限結果不大於1(100%)的應用情境(大於1之延伸情境見N-6-8)。	S-6-1 放大與縮小：比例思考的應用。「幾倍放大圖」、「幾倍縮小圖」。 知道縮放時，對應角相等，對應邊成比例。 備註：知道常見平面圖形的縮放仍然是同一類圖形(含圓)，並能說明其原因。	S-9-1 相似形：平面圖形縮放的意義；多邊形相似的意義；對應角相等；對應邊長成比例。

### 三、教學建議

#### (一) 錯誤類型的可能原因

1. 學生可能尚未掌握平面圖形放大、縮小對長度及面積的影響。
2. 學生可能不具備解複合圖形面積的能力。
3. 學生可能誤解或不理解題意。

#### (二) 核心概念與本題的教學重點

1. 教師可透過下列方式幫助學生解題。

方法一：透過長度來解題

四邊形甲底 20 公分、高 45 公分

⇒ 四邊形甲的面積 =  $20 \times 45 = 900$  (平方公分)

四邊形乙底 40 公分、高 90 公分

⇒ 四邊形乙的面積 =  $40 \times 90 = 3600$  (平方公分)

⇒ 塗色面積 =  $3600 - 900 = 2700$  (平方公分)

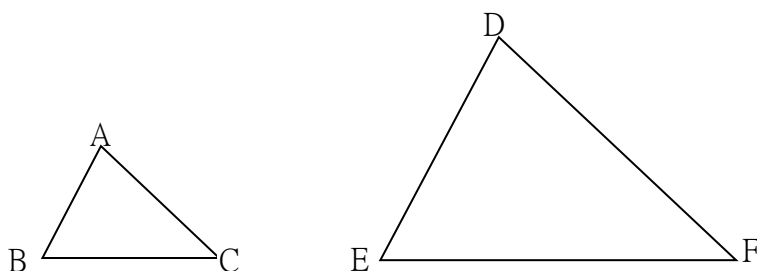
方法二：透過面積來解題

四邊形甲的面積：  $20 \times 45 = 900$  (平方公分)

四邊形乙的面積：  $900 \times 4 = 3600$  (平方公分)

塗色圖形面積：  $3600 - 900 = 2700$  (平方公分)

2. 教師應透過操作與測量協助學生學習圖形的放大圖、縮小圖，幫助學生看到兩個相似圖形間構成要素的對應關係，例如：三角形 DEF 是三角形 ABC 的 2 倍放大圖，邊 AB 的對應邊為邊 DE，邊 DE 的長度 = 邊 AB 的長度  $\times 2$ ，邊 BC 的對應邊為邊 EF，邊 EF 的長度 = 邊 BC 的長度  $\times 2$ ，邊 AC 的對應邊為邊 DF，邊 DF 的長度 = 邊 AC 的長度  $\times 2$ ；A 點的對應點為 D 點，B 點的對應點為 E 點，C 點的對應點為 F 點； $\angle A$  的對應角為  $\angle D$ ， $\angle A = \angle D$ ， $\angle B$  的對應角為  $\angle E$ ， $\angle B = \angle E$ ， $\angle C$  的對應角為  $\angle F$ ， $\angle C = \angle F$ 。



3. 教師應幫助學生連絡「比」、「比值」和「幾倍放大(縮小)圖」的關係。

教師應幫助學生認識下面三種表示法都可以說明「三角形 DEF 是三角形 ABC 的 2 倍放大圖」的關係，為引入比例尺的教學鋪路。

第一種：比的表示法

$$\overline{DE}:\overline{AB}=2:1, \overline{EF}:\overline{BC}=2:1, \overline{DF}:\overline{AC}=2:1$$

第二種：比值的表示法

$$\overline{DE} \div \overline{AB} = 2, \overline{EF} \div \overline{BC} = 2, \overline{DF} \div \overline{AC} = 2$$

第三種：倍的表示法

$$\overline{DE} \text{長是} \overline{AB} \text{的} 2 \text{ 倍}, \overline{EF} \text{長是} \overline{BC} \text{的} 2 \text{ 倍}, \overline{DF} \text{長是} \overline{AC} \text{的} 2 \text{ 倍}$$

4. 以「將正方形甲對摺兩次，得到正方形乙，請問正方形乙是正方形甲的幾倍縮小圖？」為例，有兩種溝通幾倍縮小圖的方法。

第一種：利用邊長的關係來溝通

正方形甲和正方形乙相似，對應邊成比例，正方形乙的邊長是正方形甲

$$\frac{1}{2} \text{ 倍，稱正方形乙是正方形甲的 } \frac{1}{2} \text{ 倍縮小圖。}$$

第二種：利用面積的關係來溝通

$$\text{正方形乙的面積是正方形甲面積的 } \frac{1}{4} \text{ 倍，稱正方形乙是正方形甲的 } \frac{1}{4} \text{ 倍縮小圖。}$$

因為長度比面積容易測量，因此數學上約定乙是甲的  $\frac{1}{n}$  倍縮小圖，指的是乙的邊

$$\text{長是甲的 } \frac{1}{n} \text{ 倍，不是指乙的面積是甲的 } \frac{1}{n} \text{ 倍。}$$

5. 放大和縮小都是兩個圖形的關係，教師在課堂活動或評量時，應同時描述放大或縮小前、後的兩個圖形。

例如「 $\triangle ABC$ ， $\angle A = 35^\circ$ ， $\angle B = 20^\circ$ ，將該三角形放大 2 倍後， $\angle C = ?$ 」就是錯誤的描述方式，因為問題中沒有說明 $\triangle ABC$ 放大為 2 倍後的圖形為何，正確的描述是「 $\triangle ABC$ ， $\angle A = 35^\circ$ ， $\angle B = 20^\circ$ ，將 $\triangle ABC$ 放大為 2 倍後的圖形是 $\triangle DEF$ ，求 $\angle F = ?$ 」

6. 「放大 2 倍」和「放大為 2 倍」的意義不同，「放大 2 倍」和「放大為 3 倍」的意義相同。

以邊長是 5 公分的正方形甲為例，正方形甲放大為 2 倍後的圖形是正方形乙，正方形乙的邊長是 10 公分；正方形甲放大 2 倍後的圖形是正方形丙，正方形丙的邊長比正方形甲多 10 公分，所以正方形丙的邊長是 15 公分。

教師在課堂活動時應使用「放大為 2 倍」的敘述，不可以評量「邊長放大 2 倍，面積或邊長放大為幾倍」的問題。

7. 以「長方形甲長邊長 5 公分、寬邊長 3 公分，長方形乙是長方形甲的 4 倍放大圖，請問長方形乙的面積是長方形甲的多少倍？」為例，說明如何幫助學生解題。

步驟一：長方形乙是長方形甲的 4 倍放大圖，長方形乙的長邊是  $5 \times 4$  公分，寬邊是  $3 \times 4$  公分。

步驟二：長方形甲的面積 =  $5 \times 3$

長方形乙的面積 =  $(5 \times 4) \times (3 \times 4) = 5 \times 4 \times 3 \times 4$

$$(5 \times 4 \times 3 \times 4) \div (5 \times 3) = \frac{\cancel{5} \times 4 \times \cancel{3} \times 4}{\cancel{5} \times \cancel{3}} = 4 \times 4$$

長方形乙的面積是長方形甲的  $4 \times 4$  倍。

步驟三：要求學生觀察長方形乙的面積 =  $(5 \times 4) \times (3 \times 4)$  和

長方形甲的面積 =  $5 \times 3$ ，以及答案  $4 \times 4$  倍。

幫助學生理解答  $4 \times 4$  倍前面的 4 是長邊放大為 4 倍的 4，

後面的 4 是寬邊放大為 4 倍的 4。

步驟四：回到原問題，要求學生直接算出長方形乙的面積是長方形甲的  $4 \times 4$  倍。

題號	試題代碼					答案	
19	114-M6-A3-19					4	
學習重點	N-6-5 解題：整數、分數、小數的四則應用問題。二到三步驟的應用解題。含使用概數協助解題。 備註：含處理分數和小數混合乘除計算之常用技巧。						
知識向度	數與計算		認知向度		解題思考		
題目	已知 600 公克的蒜頭賣 115 元，請問 1 公斤的蒜頭大約多少元？ （用四捨五入法將答案取概數到個位）  ① 5 ② 5.2 ③ 191 ④ 192						
選答率	選 項	1	2	3	4*	其他	通過率：34%
	全 體	0.25	0.14	0.27	0.34	0.00	
	高分組	0.13	0.03	0.24	0.61	0.00	鑑別度：0.45
	低分組	0.30	0.27	0.26	0.16	0.01	
一、試題分析							
(一) 評量目標							
本題是利用小數除法解題的連除兩步驟文字題，要求學生將商用四捨五入法取概數到指定位，評量學生兩步驟問題解題及將小數用四捨五入取概數的能力。							
(二) 數據說明							
1. 整體通過率 34%，高分組答對率 61%，低分組答對率 16%，鑑別度 0.45。							
2. 34%的學生選擇正確答案④；25%的學生選擇①；14%的學生選擇②；27%的學生選擇③。							
(三) 選項及學生表現說明							
1. 本題鑑別度為 0.45，正確答案為選項④，通過率為 34%，顯示超過三成的學生已具備利用小數除法解連除兩步驟文字題的能力；這些學生也具備將小數用四捨五入取概數的能力。							



2. 有 25%的學生選擇①（低分組有 30%），這些學生可能尚未具備利用小數除法解連除兩步驟文字題的能力；這些學生可能誤解題意，但是具備將小數用四捨五入取概數的能力，利用  $600 \div 115 = 5.2$ ，再將 5.2 利用四捨五入法取概數至個位數字，算出 1 公斤蒜頭大約 5 元。
3. 有 14%的學生選擇②（低分組有 27%），這些學生可能尚未具備利用小數除法解連除兩步驟文字題的能力；這些學生可能誤解題意，也不具備將小數用四捨五入取概數的能力，利用  $600 \div 115 = 5.2$ ，算出 1 公斤蒜頭大約 5.2 元。
4. 有 27%的學生選擇③（低分組有 26%），這些學生可能已具備利用小數除法解連除兩步驟文字題的能力；但是不具備將小數用四捨五入取概數的能力，利用  $115 \div 0.6 = 191.66$ ，算出 1 公斤蒜頭大約 191 元。

## 二、對應學習重點

	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	<p><b>N-5-11</b></p> <p>解題：對小數取概數。具體生活情境。四捨五入法。知道商除不盡的處理。理解近似的意義。</p> <p>備註：教學討論近似問題時，不出現「誤差」、「近似值」之用語。</p>	<p><b>N-6-5</b></p> <p>解題：整數、分數、小數的四則應用問題。二到三步驟的應用解題。含使用概數協助解題。</p> <p>備註：含處理分數和小數混合乘除計算之常用技巧。</p>	<p><b>N-10-5</b></p> <p>數值計算的誤差：認識計算機的有限性，可察覺誤差的發生並做適當有效位數的取捨。</p>

## 三、教學建議

### （一）錯誤類型的可能原因

1. 學生可能不具備利用小數除法解連除兩步驟文字題的能力。
2. 學生可能不具備將小數用四捨五入取概數的能力。
3. 題目的敘述比較像比的敘述，比較不像一般除法問題的描述，學生不習慣解描述像比的文字題。

## (二) 核心概念與本題的教學重點

1. 以「3 枝鉛筆賣 5 元，9 枝鉛筆賣幾元？」為例，提出四種解題策略，幫助學生解題。

(1) 單價法：先利用除法「 $5 \div 3 = \frac{5}{3}$ 」算出 1 枝鉛筆的單價是  $\frac{5}{3}$  元，再利用乘法

$$\frac{5}{3} \times 9 = \frac{45}{3} = 15$$

算出 9 枝鉛筆賣 15 元的答案。

(2) 倍數法：先用除法「 $9 \div 3 = 3$ 」算出 9 枝鉛筆是 3 枝鉛筆的 3 倍，再用乘法「 $5 \times 3 = 15$ 」算出 5 元的 3 倍是 15 元，也就是 9 枝鉛筆賣 15 元的答案。

(3) 比的加法：3 枝：5 元

3 枝：5 元

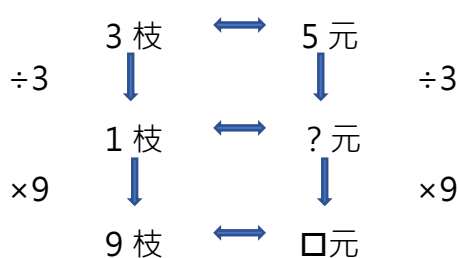
3 枝：5 元

---

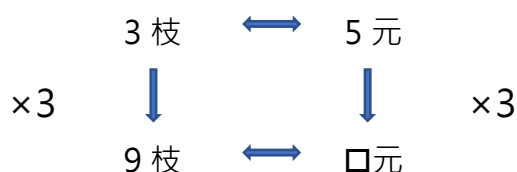
合起來：9 枝：15 元

(4) 關係式：教師也可以先用比的算式「 $3 : 5 = 9 : \square$ 」記錄問題，再將比的算式由左右併置的記法，改記成上下併置的關係式記法，關係式的記法較容易說明單價法或倍數法解題的意義。

$$\text{單價法：}(5 \div 3) = \frac{5}{3}, \frac{5}{3} \times 9 = 15$$



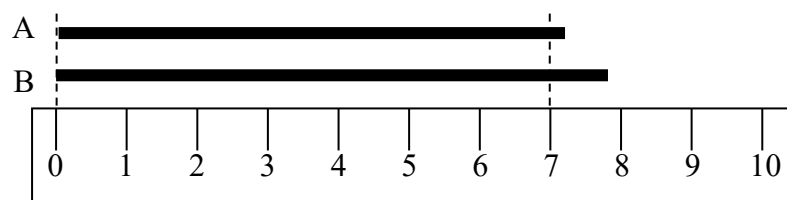
$$\text{倍數法：} 3 \times 3 = 9 (\text{或 } 9 \div 3 = 3), 5 \times 3 = 15$$



2. 下面以「將 5.6327 用四捨五入法取概數到百分位是多少？」為例，說明如何幫助學生解題。

建議教師透過下列步驟幫助學生解題：

步驟一：透過數線情境，說明四捨五入法取概數的意義



我們用最小刻度是 1 公分的直尺測量兩條繩子的長度時，如果用「無條件捨去法」取概數到個位，剩下不到 1 公分的捨去不算，A、B 兩條繩子的長度取完概數後都是 7 公分；如果用「無條件進入法」取概數到個位，剩下不到 1 公分的也算 1 公分，A、B 兩條繩子的長度取完概數後都是 8 公分。稱上面的 A 繩子長 8 公分，或稱下面的 B 繩子長 7 公分，描述繩長的誤差都很大。

如果繩子的長度比較接近 7 公分，就記成 7 公分，繩子的長度比較接近 8 公分，就記成 8 公分，例如將上面繩子的長度記成 7 公分，下面繩子的長度記成 8 公分，這樣比較接近實際的長度，也是比較公平的記法，數學上稱這種取概數的方法為「四捨五入法」。7.5 公分剛好介於 7 公分和 8 公分之間，四捨五入法約定將 7.5 公分以上（包含 7.5 公分）記成 8 公分，而 7.5 公分以下記為 7 公分。

步驟二：日常生活中用四捨五入法取概數時，常利用「看下一位」的方法來取概數，例如以 1 為單位取概數，當十分位數字是 0、1、2、3、4 時比較接近左邊的整數就捨去，當十分位數字是 5、6、7、8、9 比較接近右邊的整數就進位。例如 13.76 中的十分位數字為 7，13.76 比較接近 14，四捨五入的結果是 14；13.46 中的十分位為 4，13.46 比較接近 13，四捨五入的結果是 13。

步驟三：先找出 5.6327 的百分位數字，得到 5.6327 介於 5.63 和 5.64 之間。

5.6327 比較靠近 5.63，所以四捨五入的結果是 5.63。

也可以透過千分位數字來判斷，千位數字是 2，比較靠近 5.63，四捨五入的結果是 5.63。

題號	試題代碼					答案	
20	114-M6-B3-20					3	
學習重點	N-5-15 解題：容積。容量、容積和體積間的關係。知道液體體積的意義。 備註：教學中須包含如何以容積的想法求不規則物體的體積。						
知識向度	量與實測		認知向度		解題思考		
題目	<p>溫泉館浴池的底面積為 12 平方公尺，裡面已經注滿一半高度的溫泉水，老闆為了讓泡溫泉的客人在浴池裡可以坐著浸泡，放入了 3 個一樣大小的圓柱石椅，當石椅都沒入溫泉水裡時，水位升高了 30 公分。 請問一個圓柱石椅的體積是多少立方公尺？</p> <p>① 120 ② 3.6 ③ 1.2 ④ 0.36</p>						
選答率	選 項	1	2	3*	4	其他	通過率：30%
	全 體	0.36	0.24	0.30	0.09	0.01	
	高分組	0.41	0.13	0.41	0.05	0.00	鑑別度：0.21
	低分組	0.33	0.31	0.20	0.15	0.01	
<b>一、試題分析</b> <b>(一) 評量目標</b> 本題是容量情境的文字題，要求學生算出答案，評量學生利用容量、容積和體積之間關係解題的能力。 <b>(二) 數據說明</b> 1. 整體通過率 30%，高分組答對率 41%，低分組答對率 20%，鑑別度 0.21。 2. 30%的學生選擇正確答案③；36%的學生選擇①；24%的學生選擇②；9%的學生選擇④。 <b>(三) 選項及學生表現說明</b> 1. 本題鑑別度為0.21，正確答案為選項③，通過率為30%，顯示三成的學生已具備利用容量、容積和體積之間關係解題的能力。							

2. 有 36%的學生選擇① ( 低分組有 33% )，這些學生可能尚未具備利用容量、容積和體積之間關係解題的能力；也可能已具備利用容量、容積和體積之間關係解題的能力，但是忘記將 30 公分換算成 0.3 公尺導致答案錯誤。
3. 有 24%的學生選擇② ( 低分組有 31% )，這些學生可能已具備利用容量、容積和體積之間關係解題的能力，但是誤解題意，算出 3 個石椅的體積。
4. 有 9%的學生選擇④ ( 低分組有 15% )，這些學生可能尚未具備利用容量、容積和體積之間關係解題的能力；也可能已具備利用容量、容積和體積之間關係解題的能力，但是忘記將 30 公分換算成 0.3 公尺，同時也誤解題意，算出 3 個石椅的體積。

## 二、對應學習重點

	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	<p>N-4-12</p> <p>體積與「立方公分」：以具體操作為主。體積認識基於 1 立方公分之正方體。</p> <p>備註：教學應注意體積不容易做直接與間接比較，應和 1 立方公分之正方體一起教學。</p>	<p>N-5-15</p> <p>解題：容積。容量、容積和體積間的關係。知道液體體積的意義。</p> <p>備註：教學中須包含如何以容積的想法求不規則物體的體積。</p>	<p>S-6-4</p> <p>柱體體積與表面積：含角柱和圓柱。利用簡單柱體，理解「柱體體積 = 底面積 × 高」的公式。簡單複合形體體積。</p> <p>備註：柱體體積不用說明所有情況，即可告知體積公式為底面積 × 高。柱體限三角柱、四角柱、圓柱。複合形體之體積以兩形體組合為限。柱體表面積只處理底面為圓、長方形、直角三角形、平行四邊形的情況，且應注意底面邊長的正確性。表面積</p>

			不宜過度評量。表面積不處理複合形體。
--	--	--	--------------------



### 三、教學建議

#### (一) 錯誤類型的可能原因

1. 學生可能尚未具備利用容量、容積和體積之間關係解題的能力。
2. 學生可能習慣使用「長×寬×高」來計算體積，無法利用「底面積×高」來算體積。
3. 學生可能誤解題意，算出 3 個石椅的體積。
4. 學生可能混淆單位的意義，忘記將 30 公分換算成 0.3 公尺。

#### (二) 核心概念與本題的教學重點

1. 本題在教學上，應先幫學生釐清體積、容積、容量的定義，然後將規則形狀的物體完全沉入水中，使其明白「物體的體積等於上升水的體積」。
  - (1) 先藉由規則形體可沉入水的物體放入量筒，前後的水位變化來推動物體的體積跟上升水的體積是一樣的。
  - (2) 再由「規則形狀可沉沒入水裡的物體的體積與排開水的體積相等的經驗」，推測不規則形狀物體放入水中後，物體的體積和排開水的體積是相等的。
  - (3) 物體需完全沉入水中，物體的體積和排開水的體積一樣。放入水中物體的體積求法，可以利用無刻度的容器前後產生水位的變化來計算變化的水量。
2. 當放入了 3 個一樣大小的圓柱石椅，當石椅都沒入溫泉水裡時，水位升高了 30 公分，那麼利用底面積乘以 30，就可以求出這 3 個圓柱石椅的體積，然後再推出 1 個石椅的體積是多少立方公尺。
3. 學生在學習長方體體積公式=長×寬×高時，可以讓學生進一步看到長×寬也就是物體的底面積，因此，體積公式可由「長×寬×高」轉換為「底面積×高」。當學生有這個概念的時候，我們可以逆向的給予體積和高，讓學生求出底面積，或者是給予體積和底面積，讓學生求出高。

題號	試題代碼				答案		
21	114-M6-C3-21				1		
學習重點	S-6-2 解題：地圖比例尺。地圖比例尺之意義、記號與應用。地圖上兩邊長的比和實際兩邊長的比相等。 備註：含處理兩張地圖之間的長度關係。處理以為「比例分母愈大，相對邊長也愈大」的常見錯誤。						
知識向度	空間與形狀		認知向度		解題思考		
題目	下列有 4 張不同比例尺的 <u>中美洲</u> 地圖： A 地圖的比例尺是 1 : 100000 。 B 地圖的比例尺是 $\frac{1}{20000}$ 。 C 地圖的比例尺是  。 D 地圖的比例尺是  。 <u>巴拿馬運河</u> 在 <u>中美洲</u> ，請問 <u>巴拿馬運河</u> 在哪張地圖上的長度最短？  ① A ② B ③ C ④ D						
選答率	選 項	1*	2	3	4	其他	通過率：37%
	全 體	0.37	0.14	0.14	0.35	0.00	
	高分組	0.66	0.07	0.07	0.20	0.00	鑑別度：0.48
	低分組	0.18	0.20	0.23	0.38	0.00	
一、試題分析							
(一) 評量目標							
本題給定 4 張地圖的比例尺，要求學生判斷 <u>巴拿馬運河</u> 在哪個地圖所呈現的長度最短，評量學生利用比例尺解決日常生活中問題的能力。							

## (二) 數據說明

1. 整體通過率 37%，高分組答對率 66%，低分組答對率 18%，鑑別度 0.48。
2. 37%的學生選擇正確答案①；14%的學生選擇②；14%的學生選擇③；35%的學生選擇④。

## (三) 選項及學生表現說明

1. 本題鑑別度為 0.48，正確答案為選項①，通過率為 37%，顯示超過三成的學生已認識比例尺，也具備利用比例尺解決日常生活中問題的能力。
2. 有 14%的學生選擇②（低分組有 20%），這些學生可能不認識比例尺；也可能不具備利用比例尺解決日常生活中問題的能力。
3. 有 14%的學生選擇③（低分組有 23%），這些學生可能不認識比例尺；也可能不具備利用比例尺解決日常生活中問題的能力。
4. 有 35%的學生選擇④（低分組有 38%），這些學生可能尚未掌握比例尺的意義，誤以為地圖上長度比實際長度的比值越大，在地圖上的距離越短。

## 二、對應學習重點

	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	<b>N-5-10</b> 解題：比率與應用。整數相除的應用。含「百分率」、「折」、「成」。 備註：本條目限結果不大於1( 100% )的應用情境( 大於1之延伸情境見N-6-8 )。	<b>S-6-2</b> 解題：地圖比例尺。地圖比例尺之意義、記號與應用。地圖上兩邊長的比和實際兩邊長的比相等。 備註：含處理兩張地圖之間的長度關係。處理以為「比例分母愈大，相對邊長也愈大」的常見錯誤。	<b>N-7-9</b> 比與比例式：比；比例式；正比；反比；相關之基本運算與應用問題，教學情境應以有意義之比值為例。 備註：不涉及使用繁分數，遇到兩分數之比時，以分數相除處理之。

## 三、教學建議

### (一) 錯誤類型的可能原因

1. 學生不認識比例尺。



2. 學生不具備利用比例尺解決日常生活中問題的能力。
3. 學生以為地圖上長度比實際長度的比值越大，在地圖上的距離越短。

## (二) 核心概念與本題的教學重點


1. 教師可以透過以下方法幫助學生解題

A 地圖的比例尺是 1 : 100000

$$\Rightarrow \frac{1}{100000} : 1$$

B 地圖的比例尺是  $\frac{1}{20000}$

$$\Rightarrow \frac{1}{20000} : 1$$

C 地圖的比例尺是 

$$\Rightarrow 1 \text{ 公分} : 0.5 \text{ 公里}$$

$$\Rightarrow 1 \text{ 公分} : 50000 \text{ 公分} \Rightarrow \frac{1}{50000} : 1$$

D 地圖的比例尺是 

$$\Rightarrow 1 \text{ 公分} : 100 \text{ 公尺}$$

$$\Rightarrow 1 \text{ 公分} : 10000 \text{ 公分} \Rightarrow \frac{1}{10000} : 1$$

實際長是 1 公分時  $\Rightarrow \frac{1}{100000}$  最短  $\Rightarrow$  在 A 地圖的長度最短。

2. 教師應幫助學生連絡「比」、「比值」和「幾倍放大 ( 縮小 ) 圖」的關係。

教師應幫助學生認識下面三種表示法都可以說明「三角形 DEF 是三角形 ABC 的 2 倍放大圖」的關係，為引入比例尺的教學鋪路。

第一種：比的表示法

$$\overline{DE} : \overline{AB} = 2 : 1, \overline{EF} : \overline{BC} = 2 : 1, \overline{DF} : \overline{AC} = 2 : 1$$

第二種：比值的表示法

$$\overline{DE} \div \overline{AB} = 2, \overline{EF} \div \overline{BC} = 2, \overline{DF} \div \overline{AC} = 2$$

第三種：倍的表示法

$\overline{DE}$ 長是 $\overline{AB}$ 的 2 倍， $\overline{EF}$ 長是 $\overline{BC}$ 的 2 倍， $\overline{DF}$ 長是 $\overline{AC}$ 的 2 倍

2. 建議教師透過縮小圖的情境引入比例尺，例如畫出籃球場 $\frac{1}{10}$ 倍的縮小圖，

再透過 $\frac{1}{10}$ 倍的縮小圖引入比例尺的意義及記法，不宜直接透過地圖引入比例尺。

3. 數學上習慣將實際的長度當作基準量，地圖上的長度當作比較量，

下面以「實際長度 1 公里，地圖上長 1 公分」為例，說明比例尺的表示法。

有兩種表示比例尺的方法，一種是利用同單位的比或比值來表示，另一種是利用不同單位的比或比值來表示。

#### (1) 同單位的表示法

同單位的表示法又可以區分為比的表示法和比值的表示法，因為單位相同，因此同單位的表示法都不記錄單位。

a. 比的表示法：1 公里 = 1000 公尺 = 100000 公分

可以用「1 : 100000」或「 $\frac{1}{100000}$  : 1」來表示。

「 $\frac{1}{100000}$  : 1」的記法較容易連結比和比值的關係。

使用 1:100000 溝通比例尺時，表示地圖上長 1 公分，實際的長是 100000 公分；地圖上長 1 公尺，實際的長是 100000 公尺；地圖上長 1 毫米，實際的長是 100000 毫米。

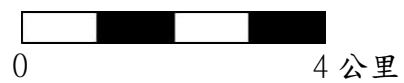
b. 比值的表示法：「1 : 100000」和「 $\frac{1}{100000}$  : 1」的比值都是 $\frac{1}{100000}$ 。

#### (2) 不同單位的表示法

不同單位的表示法也可以區分為比的表示法和比值的表示法，因為單位不同，因此不同單位的表示法都必須記錄單位。

a. 比的表示法：「1 公分 : 1 公里」。

b. 比值的表示法：1 公分：1 公里 = 1 公分/公里，日常生活中不常出現這種記法，都用下面的圖示法來呈現。



題號	試題代碼				答案		
22	114-M6-C1-22				2		
學習重點	S-6-3 圓周率、圓周長、圓面積、扇形面積：用分割說明圓面積公式。求扇形弧長與面積。知道以下三個比相等：( 1 ) 圓心角：360；( 2 ) 扇形弧長：圓周長；( 3 ) 扇形面積：圓面積，但應用問題只處理用 ( 1 ) 求弧長或面積。  備註：由於圓周率取成 3.14，在計算時應以概念理解為原則，避免陷入複雜計算。可利用活動說明一般不規則區域的面積要如何理解和估計，但不評量。扇形面積與弧長只處理直接問題 ( 如已知幾分之幾圓或圓心角求面積或弧長 )，不處理逆推或過多推理步驟的問題 ( 屬於國中範圍，S-9-5 )。						
知識向度	空間與形狀		認知向度		概念理解		
題目	有一個半徑 5 公分的圓和一個半徑 5 公分的 $\frac{1}{3}$ 圓。 下列哪個選項是圓的直徑長和 $\frac{1}{3}$ 圓的弧長的圖示？						
	<div>①</div> <div></div>						
	<div>②</div> <div></div>						
	<div>③</div> <div></div>						
	<div>④</div> <div></div>						
選答率	選 項	1	2*	3	4	其他	通過率：31%
	全 體	0.33	0.31	0.14	0.21	0.00	
	高分組	0.24	0.54	0.06	0.15	0.00	鑑別度：0.35
	低分組	0.35	0.19	0.23	0.23	0.01	

## 一、試題分析

### (一) 評量目標

本題給定半徑相同的圓和扇形，要求學生選出能呈現圓的直徑和 $\frac{1}{3}$ 圓弧長的圖示，評量學生利用圓周率解題的能力。

### (二) 數據說明

1. 整體通過率 31%，高分組答對率 54%，低分組答對率 19%，鑑別度 0.35。
2. 31%的學生選擇正確答案②；33%的學生選擇①；14%的學生選擇③；21%的學生選擇④。

### (三) 選項及學生表現說明

1. 本題鑑別度為 0.35，正確答案為選項②，通過率為 31%，顯示超過三成的學生已具備利用圓周率解題的能力。
2. 有 33%的學生選擇①（低分組有 35%），這些學生可能尚未具備利用圓周率解題的能力。
3. 有 14%的學生選擇③（低分組有 23%），這些學生可能尚未具備利用圓周率解題的能力。
4. 有 21%的學生選擇④（低分組有 23%），這些學生可能尚未具備利用圓周率解題的能力。

## 二、對應學習重點

	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	S-5-3 扇形：扇形的定義。「圓心角」。扇形可視為圓的一部分。將扇形與分數結合（幾分之幾圓）。能畫出指定扇形。 備註：扇形含圓心角大於 180 度的情況。理解如「圓心角 90 度	S-6-3 圓周率、圓周長、圓面積、扇形面積：用分割說明圓面積公式。求扇形弧長與面積。知道以下三個比相等：(1)圓心角：360；(2)扇形弧長：圓周長；(3)扇形面積：圓面積，但應	S-9-6 圓的幾何性質：圓心角、圓周角與所對應弧的度數三者之間的關係；圓內接四邊形對角互補；切線段等長。

	<p>的扇形是<math>\frac{1}{4}</math>圓」等的結論。畫出指定扇形包括「給定一圓，能畫出<math>\frac{1}{3}</math>圓、<math>\frac{1}{6}</math>圓等扇形」、「畫出指定半徑與圓心角的扇形」。</p>	<p>用問題只處理用(1)求弧長或面積。</p> <p>備註:由於圓周率取成3.14，在計算時應以概念理解為原則，避免陷入複雜計算。可利用活動說明一般不規則區域的面積要如何理解和估計，但不評量。扇形面積與弧長只處理直接問題(如已知幾分之幾圓或圓心角求面積或弧長)，不處理逆推或過多推理步驟的問題(屬於國中範圍，S-9-5)。</p>	
--	---	--	--

### 三、教學建議

#### (一) 錯誤類型的可能原因

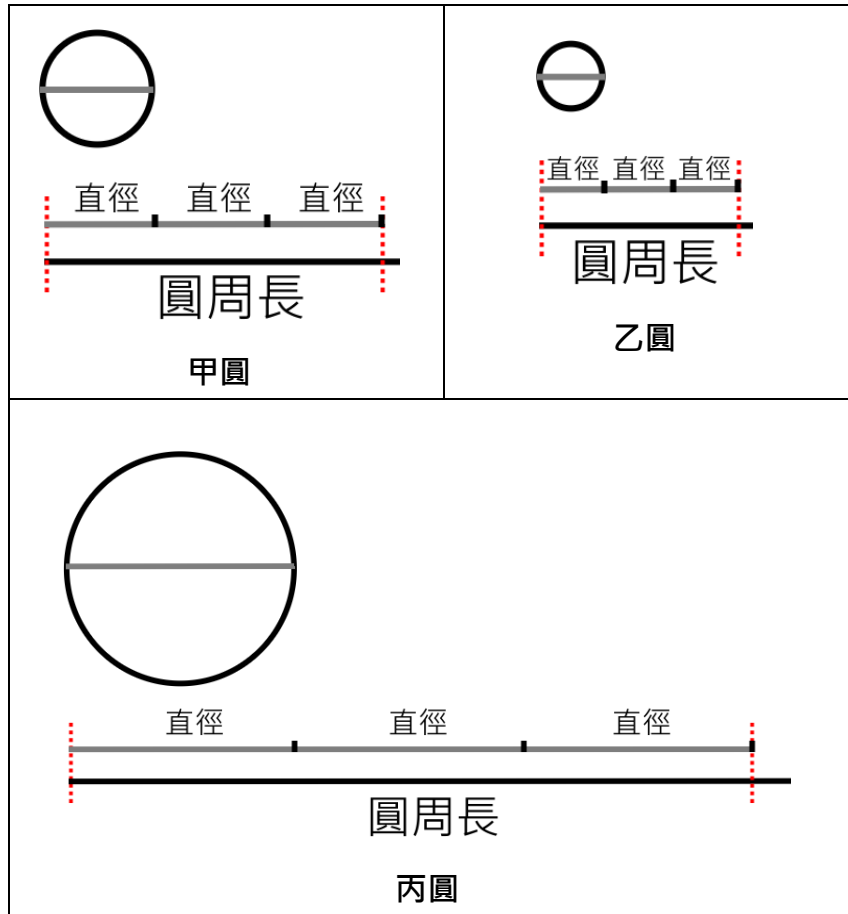
1. 學生可能尚未具備利用圓周率解題的能力。
2. 學生可能不理解題目圖示所代表的意義。

#### (二) 核心概念與本題的教學重點

1. 圓周率的率指的是比率，比率相等指的是所有的圓都相似，也就是說，所有的圓，其圓周長和直徑的比、圓周長和半徑的比以及直徑和半徑的比都相等。  
圓的周長是曲線，不易測量其長度，而圓的直徑是直線，比較容易測量，因此只要知道「圓周長：直徑長」的比值，測量出直徑後就能算出圓的周長，數學上稱「圓周長：直徑長」的比值為圓周率。
2. 下面說明如何幫助學生掌握圓周率的意義：  
教師先給定 3 個大小不同的圓，再提供下面兩種情境，幫助學生認識圓周長比直徑的 3 倍還長一點，為後面引入圓周率的近似值 3.14 鋪路。

(1) 觀察給定三個圓的圓周長和 3 倍直徑長的長短關係

教師分別畫出這 3 個圓的圓周長以及直徑長的 3 倍，要求學生觀察這些圓的圓周長和 3 倍直徑長，幫助學生認識圓周長比直徑的 3 倍還長一點，為後面引入圓周率的近似值 3.14 鋪路。如下所示：



(2) 比較三個圓「圓周長÷直徑長」商的大小關係

教師給定三個圓的圓周和直徑的長度，以及「圓周長÷直徑長」的商以四捨五入法取概數到百分位，幫助學生認識「圓周長÷直徑長」的商都比 3 大一點，為後面引入圓周率的近似值 3.14 鋪路。如下所示：

	圓周長(公分)	直徑長(公分)	圓周長÷直徑長 (四捨五入到百分位)
甲圓	56.5	18	3.14
乙圓	38.0	12	3.17
丙圓	72.5	23	3.15

教師應同時提供兩種情境，幫助學生認識「圓周長÷直徑長」的商都比 3 大一點。

第一種是比的想法，學生可以同時看到圓周長和直徑 3 倍長的關係；第二種情境是比值的想法，學生可能只將注意力放在「圓周長÷直徑長」的商，而無法察覺圓周長和直徑 3 倍長的關係。

3. 「圓周長÷直徑長 = 圓周率 (  $\frac{\text{圓周長}}{\text{直徑}} = \text{圓周率}$  ) 」和「圓周長 = 直徑長×3.14」

是相同的關係，只記憶其中一個公式，就能導出另一個公式。前者較容易幫助學生認識圓周率的意義，而後者只幫助學生記憶圓周率是 3.14。

建議教師教學時，宜強調「圓周長÷直徑長 = 圓周率(3.14)」，幫助學生掌握圓周率的意義，不宜只強調「圓周長 = 直徑長×3.14」。



題號	試題代碼				答案		
23	114-M6-A1-23				3		
學習重點	N-6-7 解題：速度。比和比值的應用。速度的意義。能做單位換算 ( 大單位到小單位 ) 。含不同時間區段的平均速度。含「距離＝速度×時間」公式。用比例思考協助解題。  備註：除不同時間區段的平均速度問題外，小學速度問題的假設都是等速運動。含速度固定，時間為幾倍，距離即為幾倍的問題。含時間固定，速度為幾倍，距離即為幾倍的問題。所謂「大單位到小單位」，指的是不論是長度或時間，都只做大單位到小單位的換算。						
知識向度	數與計算		認知向度		概念理解		
題目	<p>樂樂和恩恩參加 9 公里路跑活動，補給站距離出發點 6 公里，兩個人同時從起點出發，同時到達終點。樂樂以分速 100 公尺跑完全程。恩恩先以分速 120 公尺從起點跑到補給站；再以分速 75 公尺從補給站跑到終點。請問恩恩這次路跑的平均速率是多少公尺/分鐘？</p> <p>① 87.5 ② 97.5 ③ 100 ④ 110</p>						
選答率	選 項	1	2	3*	4	其他	通過率：40%
	全 體	0.16	0.32	0.40	0.11	0.01	
	高分組	0.06	0.18	0.71	0.04	0.00	鑑別度：0.51
	低分組	0.24	0.37	0.20	0.17	0.01	
一、試題分析							
(一) 評量目標							
本題給定甲地到丙地的距離和兩人跑步的速率，要求學生算出其中一人的平均速率，評量學生解決生活中速率問題的能力。							
(二) 數據說明							
1. 整體通過率 40%，高分組答對率 71%，低分組答對率 20%，鑑別度 0.51。							

2. 40%的學生選擇正確答案③；16%的學生選擇①；32%的學生選擇②；11%的學生選擇④。

### (三) 選項及學生表現說明

1. 本題鑑別度為 0.51，正確答案為選項③，通過率為 40%，顯示四成的學生已具備解決生活中速率問題的能力。
2. 有 16%的學生選擇①（低分組有 24%），這些學生可能尚未具備解決生活中速率問題的能力；這些學生可能不知道兩人跑步的時間和距離相同時，兩人的平均速率一定相同，他們混淆平均速率和平均的想法，利用 $(100 + 75) \div 2 = 87.5$ ，算出平均速率是 87.5 公尺/分鐘。
3. 有 32%的學生選擇②（低分組有 37%），這些學生可能尚未具備解決生活中速率問題的能力；這些學生可能不知道兩人跑步的時間和距離相同時，兩人的平均速率一定相同，他們混淆平均速率和平均的想法，利用 $(120 + 75) \div 2 = 97.5$ ，算出平均速率是 97.5 公尺/分鐘。
4. 有 11%的學生選擇④（低分組有 17%），這些學生可能尚未具備解決生活中速率問題的能力；這些學生可能不知道兩人跑步的時間和距離相同時，兩人的平均速率一定相同，他們混淆平均速率和平均的想法，利用 $(100 + 120) \div 2 = 110$ ，算出平均速率是 110 公尺/分鐘。

## 二、對應學習重點

	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	<p>N-6-6</p> <p>比與比值：異類量的比與同類量的比之比值的意義。理解相等的比中牽涉到的兩種倍數關係（比例思考的基礎）。解決比的應用問題。</p> <p>備註：比中各數原則上為整數，但也可包</p>	<p>N-6-7</p> <p>解題：速度。比和比值的應用。速度的意義。能做單位換算（大單位到小單位）。含不同時間區段的平均速度。含「距離＝速度×時間」公式。用比例思考協助解題。</p> <p>備註：除不同時間區段的平均速度問題</p>	<p>N-7-9</p> <p>比與比例式：比；比例式；正比；反比；相關之基本運算與應用問題，教學情境應以有意義之比值為例。</p> <p>備註：不涉及使用繁分數，遇到兩分數之比時，以分數相除處理之。</p>

	含簡單之小數與分數。	外，小學速度問題的假設都是等速運動。含速度固定，時間為幾倍，距離即為幾倍的問題。含時間固定，速度為幾倍，距離即為幾倍的問題。所謂「大單位到小單位」，指的是不論是長度或時間，都只做大單位到小單位的換算。	
--	------------	--	--

### 三、教學建議

#### (一) 錯誤類型的可能原因

1. 學生可能不認識平均速率。
2. 學生可能不具備利用速率解題的能力。
3. 學生可能不知道兩人跑步的時間和距離相同時，兩人的平均速率一定相同。

#### (二) 核心概念與本題的教學重點

1. 速度與速率是兩種不同的概念，速度是向量的概念，速率是純量的概念。

例如甲、乙兩地的距離是 100 公里，由甲地開車先到乙地，再由乙地開車回甲地，共花了 2 小時。開車的距離是 200 公里，時間是 2 小時，我們說平均速率是 100 公里/小時；開車的位移是 0 公里，時間是 2 小時，我們說平均速度為 0 公里/小時。日常生活中常混用這兩個名詞，將速率與速度都稱之為速度。學習內容中的速度，指的是日常生活中常用的一般名詞，也就是速率的意思。建議教師在教學時，儘量使用速率的說法。

2. 以「甲 3 小時跑 5 公里，乙 5 小時跑 8 公里，誰跑得比較快？」為例，有兩種比較誰比較快的方法。

第一種：時間相同，比較誰跑的距離比較長。

甲：3 小時跑 5 公里  $\Rightarrow$  15 小時跑 25 公里。

乙：5 小時跑 8 公里 $\Rightarrow$ 15 小時跑 24 公里。

25 公里比 24 公里長，也就是 25 比 24 大，甲跑得比較快。

第二種：距離相同，比較誰跑的時間比較短。

甲：3 小時跑 5 公里 $\Rightarrow$ 24 小時跑 40 公里。

乙：5 小時跑 8 公里 $\Rightarrow$ 25 小時跑 40 公里。

24 小時比 25 小時短，也就是 24 比 25 小，甲跑得比較快。

由上面的說明可以知道，可以有兩種定義速率的方法：

第一種：速率 = 距離：時間

第二種：速率 = 時間：距離

第一種方法中，時間相同時，距離的數字比較大時，速率比較快，距離的數字比較小時，速率比較慢；第二種方法中，距離相同時，時間的數字比較大時，速率比較慢，時間的數字比較小時，速率比較快。為了讓速率的數字比較大時，跑得比較快，數字比較小時，跑得比較慢，數學上都選擇第一種方法為速率的定義。

3. 「平均 1 小時跑 60 公里」是日常生活中常見的說法，下面提供三種也可以溝通「平均 1 小時跑 60 公里」的方法。

方法一：60 公里：1 小時

方法二：60 公里/小時

方法三：時速 60 公里

方法一是利用比的記法來溝通速率，方法二是利用比值的記法來溝通速率，方法三是日常生活中常用的說法。

建議教師幫助學生熟練「時速 60 公里」、「速率 60 公里/小時」、「60 公里：1 小時」這三種說法間的轉換，但在解題時，儘量利用比的方法來解題，因為比的記法較能夠看到時間和距離兩量的關係。

4. 以「甲地到乙地的距離是 120 公里，速率是 60 公里/小時，乙地到丙地的距離是 300 公里，速率是 100 公里/小時，問甲地經過乙地到丙地的平均速率是多少？」為例，很多學生直接利用平均的想法，透過 $(60 + 100) \div 2 = 80$ ，算出平均速率是 80 公里/小時。數學上只有在自然數（點數個數）的情境才能利用平均的想法來解題，速率不是自然數，因此不能透過將兩個速率平分來求平均速率，必須回到速率的定義，利用全部的距離除以全部的時間來解題。甲地到乙地的距離是 120

公里，要花 2 小時，乙地到丙地的距離是 300 公里，要花 3 小時， $120 + 300 = 420$ ， $2 + 3 = 5$ ， $420 \div 5 = 84$ ，因此甲地經過乙地到丙地的平均速率是 84 公里/小時。

題號	試題代碼				答案	
24	114-M6-A1-24				4	
學習重點	N-6-8 解題：基準量與比較量。比和比值的應用。含交換基準時之關係。  備註：所謂交換基準如以哥哥身高為 1，弟弟身高為 $\frac{4}{5}$ ，則以弟弟身高為 1， 哥哥身高為 $\frac{5}{4}$ 。					
知識向度	數與計算		認知向度		概念理解	
題目	合唱團有 88 個人，女生人數是男生人數的 $\frac{17}{5}$ 倍。 請問「男、女生人數差」是「女生人數」的多少倍？  ① $\frac{12}{5}$  ② $\frac{5}{12}$  ③ $\frac{17}{12}$  ④ $\frac{12}{17}$					
選答率	選 項	1	2	3	4*	其他
	全 體	0.19	0.24	0.23	0.33	0.01
	高分組	0.11	0.17	0.13	0.58	0.01
	低分組	0.25	0.28	0.28	0.19	0.01
通過率：33%						
鑑別度：0.39						
一、試題分析						
(一) 評量目標						
本題給定學生人數及女生人數是男生的幾倍，要求學生算出男、女生人數之差是女生人數的多少倍，評量學生利用基準量與比較量關係解題的能力。						
(二) 數據說明						
1. 整體通過率 33%，高分組答對率 58%，低分組答對率 19%，鑑別度 0.39。						

2. 33%的學生選擇正確答案④；19%的學生選擇①；24%的學生選擇②；23%的學生選擇③。

### (三) 選項及學生表現說明

1. 本題鑑別度為 0.39，正確答案為選項④，通過率為 33%，顯示超過三成的學生已具備利用基準量與比較量關係解題的能力。
2. 有 19%的學生選擇①（低分組有 25%），這些學生可能尚未具備利用基準量與比較量關係解題的能力。
3. 有 24%的學生選擇②（低分組有 28%），這些學生可能尚未具備利用基準量與比較量關係解題的能力。
4. 有 23%的學生選擇③（低分組有 28%），這些學生可能尚未具備利用基準量與比較量關係解題的能力。

## 二、對應學習重點

	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	N-5-10 解題：比率與應用。整數相除的應用。含「百分率」、「折」、「成」。 備註：本條目限結果不大於 1（100%）的應用情境（大於 1 之延伸情境見 N-6-8）。	N-6-8 解題：基準量與比較量。比和比值的應用。含交換基準時之關係。 備註：所謂交換基準如以哥哥身高為 1，弟弟身高為 $\frac{4}{5}$ ，則以弟弟身高為 1，哥哥身高為 $\frac{5}{4}$	無。

## 三、教學建議

### (一) 錯誤類型的可能原因

1. 學生可能不理解學生人數及女生人數是男生的幾倍的意義。
2. 學生可能尚未具備利用基準量與比較量關係解題的能力。

## (二) 核心概念與本題的教學重點

1. 比率問題包含「比率未知」、「部分量未知」及「全部量未知」三類問題。

下面以「全班有 25 人，女生有 10 人。」為例，說明這三類問題的題型。

比率未知問題：全班有 25 人，女生有 10 人，女生佔全班的幾分之幾？

部分量未知問題：全班有 25 人，女生佔全班的  $\frac{2}{5}$ ，女生有多少人？

全部量未知問題：女生有 10 人，佔全班的  $\frac{2}{5}$ ，全班有多少人？

2. 以相同口味的紅茶牛奶為例，說明最簡單整數比的意義。

紅茶	牛奶
200 公升：	120 公升
100 公升：	60 公升
50 公升：	30 公升
10 公升：	6 公升
5 公升：	3 公升

步驟一：說明上面的比都是相等的比，調出的紅茶牛奶口味都相同。

步驟二：溝通比較簡單比的意義

步驟三：引入最簡單整數比的記法，5 和 3 互質，找不到比 5 : 3 更簡單的整數比，數學上稱 5 : 3 為最簡單整數比。

「100 : 60」和「200 : 120」前後項的數字都是整數，「100 : 60」的數字都比「200 : 120」的數字簡單，稱「100 : 60」是比「200 : 120」簡單的整數比。「5 : 3」的數字都比「10 : 6」的數字簡單，稱「5 : 3」是比「10 : 6」簡單的整數比。

步驟四：說明最簡單整數比的意義，5 : 3 是上面這些相同口味紅茶牛奶的調配方法，上面的紅茶牛奶都可以利用紅茶 5 份和牛奶 3 份的方式調出。

3. 回到本題，題目給予全唱團總人數是 88 人，告知其女生人數是男生人數的  $\frac{17}{5}$

倍。教師可以引導學生理解  $\frac{17}{5}$  倍的意義。女生人數是男生人數的  $\frac{17}{5}$  倍即表示女生：男生 = 17 : 5，那麼我們就可以想像女生有 17 份，男生就是有 5 份，可以得到合唱團總數就是 22 份，題目又告知全唱團總人數是 88 人，那麼就可以推算出



一份就代表  $88 \div 22 = 4$  (人)，如此一來我們就可，我們就可以推出女生人數是  $4 \times 17 = 68$  人 (因為女生占 17 份)，男生人數是  $4 \times 5 = 20$  (因為男生占 5 份)。在依題目要求的是「男、女生人數差」是「女生人數」的多少倍？則可算出男女

生之差為  $68 - 20 = 48$ ，所以「男、女生人數差」是「女生人數」的  $48 \div 68 = \frac{12}{17}$ 。

4. 另外一種巧算的方式，即使不知道總數，也可以利用比值來進行解題。這必須建立在學生對比值意義的理解。

不管總數是多少，女生人數是男生人數的  $\frac{17}{5}$  倍就代表女生有 17 份，男生就是有 5 份，那麼題目問「男、女生人數差」是「女生人數」的多少倍？

那麼男、女生人數差為  $17 - 5 = 12$  份，而女生是 17 份，所以「男、女生人數差」

是「女生人數」的  $\frac{12}{17}$  倍。如此一來是不是就變簡單了呢。

題號	試題代碼				答案		
25	114-M6-A3-25				1		
學習重點	N-6-7 解題：速度。比和比值的應用。速度的意義。能做單位換算 ( 大單位到小單位 )。含不同時間區段的平均速度。含「距離＝速度×時間」公式。用比例思考協助解題。  備註：除不同時間區段的平均速度問題外，小學速度問題的假設都是等速運動。含速度固定，時間為幾倍，距離即為幾倍的問題。含時間固定，速度為幾倍，距離即為幾倍的問題。所謂「大單位到小單位」，指的是不論是長度或時間，都只做大單位到小單位的換算。						
知識向度	數與計算		認知向度		解題思考		
題目	爸爸開汽車的時速是 72 公里，請問汽車行駛 5 公尺需要多少秒鐘？  ① 0.25 ② 2.5 ③ 14.4 ④ 100						
選答率	選 項	1*	2	3	4	其他	通過率：40%
	全 體	0.40	0.23	0.22	0.15	0.01	
	高分組	0.68	0.14	0.05	0.12	0.01	鑑別度：0.50
	低分組	0.18	0.26	0.39	0.16	0.01	
一、試題分析							
(一) 評量目標							
本題給定汽車的時速是幾公里，要求學生算出行駛幾公尺要多少秒鐘，評量學生速率單位換算的能力。							
(二) 數據說明							
1. 整體通過率 40%，高分組答對率 68%，低分組答對率 18%，鑑別度 0.5。							
2. 40%的學生選擇正確答案①；23%的學生選擇②；22%的學生選擇③；15%的學生選擇④。							

### (三) 選項及學生表現說明

1. 本題鑑別度為 0.5，正確答案為選項①，通過率為 40%，顯示四成的學生已具備利用速率單位換算解題的能力。
2. 有 23%的學生選擇②（低分組有 26%），這些學生可能不具備利用速率單位換算解題的能力；也可能已具備利用速率單位換算解題的能力，但是在計算時發生錯誤。
3. 有 22%的學生選擇③（低分組有 39%），這些學生可能不具備利用速率單位換算解題的能力，直接將題目中的兩個數字相除， $72 \div 5 = 14.4$ ，算出需要 14.4 秒鐘。
4. 有 15%的學生選擇④（低分組有 16%），這些學生可能不具備利用速率單位換算解題的能力；學生也可能算出時速 72 公里是秒速 20 公尺，但是誤解題意，利用  $20 \times 5 = 100$ ，算出需要 100 秒鐘。

### 二、對應學習重點

	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	<p>N-6-6</p> <p>比與比值：異類量的比與同類量的比之比值的意義。理解相等的比中牽涉到的兩種倍數關係（比例思考的基礎）。解決比的應用問題。</p> <p>備註：比中各數原則上為整數，但也可包含簡單之小數與分數。</p>	<p>N-6-7</p> <p>解題：速度。比和比值的應用。速度的意義。能做單位換算（大單位到小單位）。含不同時間區段的平均速度。含「距離＝速度×時間」公式。用比例思考協助解題。</p> <p>備註：除不同時間區段的平均速度問題外，小學速度問題的假設都是等速運動。含速度固定，時間為幾倍，距離即為幾倍的問題。含時間固定，速度為幾倍，距離即</p>	<p>N-6-9</p> <p>解題：由問題中的數量關係，列出恰 NC-6-9-1 利用常用的數量關係，列出恰當的算式，進行解題，並檢驗解的合理性。空間與形當的算式解題（同 R-6-4）。可包含（1）較複雜的模式（如座位排列模式）；（2）較複雜的計數：乘法原理、加法原理或其混合；（3）較複雜之情境：如年齡問題、流水問題、和差問題、雞</p>

			<p>為幾倍的問題。所謂「大單位到小單位」，指的是不論是長度或時間，都只做大單位到小單位的換算。</p>	<p>免問題。連結 R-6-2、R-6-3。</p> <p>備註：乘法原理如 3 件上衣與 5 件裙子的搭配方式；加法原理如允許重複，1、2、3 可排出幾種二位奇數；乘法原理與加法原理混合如 1、2、3 可排出幾種三位奇數。乘法原理和加法原理旨在初步學習計數的觀點，而非複雜的計數問題。本條目不要求併式。</p>	
--	--	--	--	--	--

### 三、教學建議

#### (一) 錯誤類型的可能原因

1. 學生不具備利用速率單位換算解題的能力。
2. 學生不理解時速 72 公里的意義。

#### (二) 核心概念與本題的教學重點

1. 平均 1 小時跑 60 公里」是日常生活中常見的說法，下面提供三種也可以溝通「平均 1 小時跑 60 公里」的方法。

方法一：60 公里：1 小時

方法二：60 公里/小時

方法三：時速 60 公里

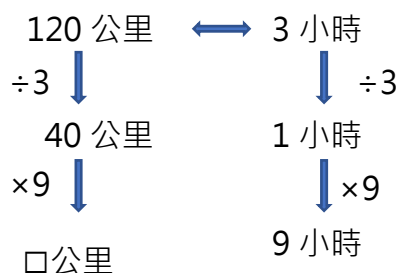
方法一是利用比的記法來溝通速率，方法二是利用比值的記法來溝通速率，方法三是日常生活中常用的說法。

建議教師幫助學生熟練「時速 60 公里」、「速率 60 公里/小時」、「60 公里：1 小時」這三種說法間的轉換，但在解題時，儘量利用比的方法來解題，因為比的記法較能夠看到時間和距離兩量的關係。

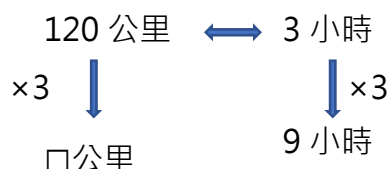
2. 以「甲車 3 小時跑 120 公里，9 小時跑多少公里？」為例，下面提供使用比來解題的方法給老師們參考。

先用算式「120 公里：3 小時 = □公里：9 小時」來記錄問題，再利用關係式的記法，利用單價法或倍數法來解題。

單價法： $(120 \div 3) = 40$ ， $40 \times 9 = 360$ ，答：360 公里



倍數法： $3 \times 3 = 9$  ( 或  $9 \div 3 = 3$  )， $120 \times 3 = 360$ ，答：360 公里



3. 以「汽車的時速 90 公里，它的分速是多少公尺？」為例，學生比較無法掌握比值想法解決速度換單位問題解題的意義。

$$90 \frac{\text{公里}}{\text{小時}} = 90 \times \frac{1000 \text{ 公尺}}{60 \text{ 分鐘}} = 90 \times \frac{1000}{60} \frac{\text{公尺}}{\text{分鐘}} = 1500 \frac{\text{公尺}}{\text{分鐘}}$$

建議教師可以透過比的想法，來幫助學生解決時速、分速及秒速單位間的換算問題。

$$\begin{aligned} 90 \text{ 公里/小時} &= 90 \text{ 公里} : 1 \text{ 小時} \\ &= 90000 \text{ 公尺} : 60 \text{ 分鐘} \\ &= 90000 \text{ 公尺} \div 60 : 60 \text{ 分鐘} \div 60 \\ &= 1500 \text{ 公尺} : 1 \text{ 分鐘 ( 分速是 1500 公尺 )} \end{aligned}$$

## 伍、整體學力表現分析

### 一、不同背景變項學生整體學力表現分析

本計畫同時採用古典測驗理論( classical test theory, CTT )與試題反應理論( item response theory, IRT ) 三參數模式作為試題分析理論基礎，並以三參數模式進行學生能力估計。三參數模式有 a、b、c 三種參數，分別代表鑑別度、難度以及猜測度。學生能力估計值則參考 PISA 與 TIMSS 等國際大型測驗的作法，將估計出來的能力轉換至平均分數 500，標準差 100 的量尺上，再以轉換所得量尺分數進行不同背景變項學生表現分析。本年度數學六年級整體學生學力表現分布狀況，如圖 5-1 所示。

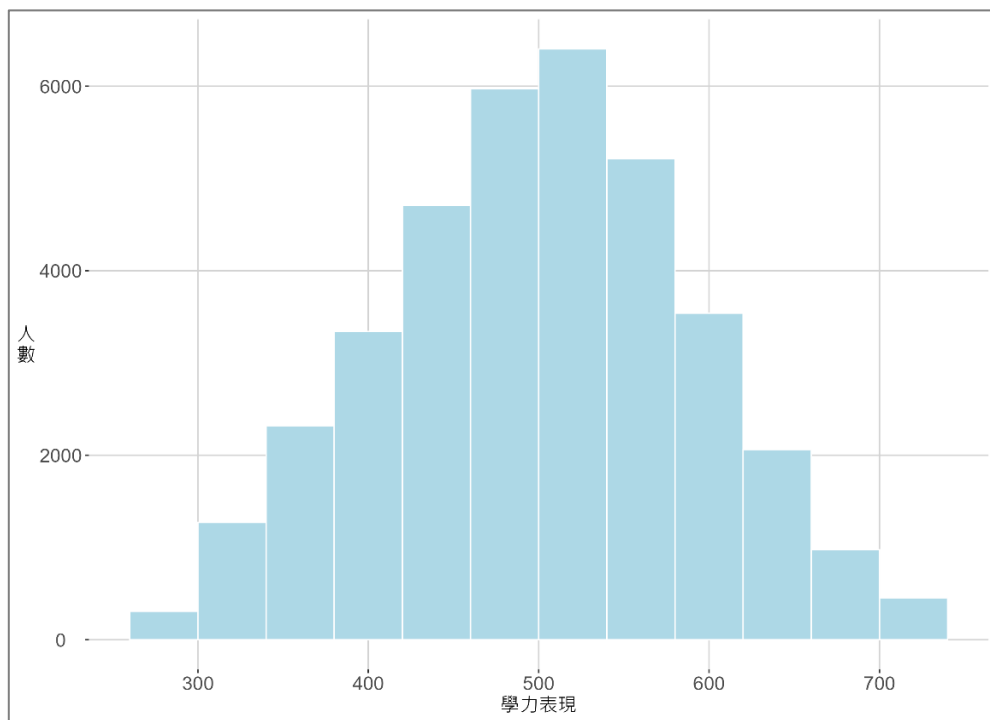


圖 5-1 數學六年級整體學生學力表現分布圖

## 二、國民小學六年級學生於不同學習重點之答對率表現

藉由將「國民小學數學六年級學生學習能力檢測」題號，對應之十二年國教課程綱要學習重點和答對率進行交叉對照，可更明確檢視學生表現較優異和有待加強之處，相關整理如表 5-1 所示。

表 5-1-1 數與計算學習重點及其答對率之交叉對照表

答對率%	題號	學習重點
91~100		
81~90		
71~80	2	N-6-6 比與比值：異類量的比與同類量的比之比值的意義。理解相等的比中牽涉到的兩種倍數關係（比例思考的基礎）。解決比的應用問題。 備註：比中各數原則上為整數，但也可包含簡單之小數與分數。
	8	N-5-10 解題：比率與應用。整數相除的應用。含「百分率」、「折」、「成」。 備註：本條目限結果不大於 1 ( 100% ) 的應用情境 ( 大於 1 之延伸情境見 N-6-8 ) 。
	9	N-6-5 解題：整數、分數、小數的四則應用問題。二到三步驟的應用解題。含使用概數協助解題。 備註：含處理分數和小數混合乘除計算之常用技巧。
61~70	4	N-6-4 小數的除法：整數除以小數、小數除以小數的意義。直式計算。教師用位值的概念說明直式計算的合理性。處理商一定比被除數小的錯誤類型。 備註：可不處理餘數問題，若要處理，限於具體合理的生活情境，商限定為整數，並小心在直式計算中處理餘數問題。餘數問題不評量。

51~60	7	N-6-2	<p>最大公因數與最小公倍數：質因數分解法與短除法。兩數互質。運用到分數的約分與通分。</p> <p>備註：不做三數的最大公因數與最小公倍數。應包含練習將分數化成最簡分數的問題。</p>
	10	N-6-3	<p>分數的除法：整數除以分數、分數除以分數的意義。最後理解除以一數等於乘以其倒數之公式。</p> <p>備註：可不處理餘數問題。若要處理，限於具體合理的生活情境。餘數問題不評量。</p>
41~50	15	N-6-1	<p>20 以內的質數和質因數分解：小於 20 的質數與合數。2、3、5 的質因數判別法。以短除法做質因數的分解。</p> <p>備註：被分解數的因數，在扣除 2、3、5 或其次方的部分後、只剩一因數，且此數除了 49、77 或 91 之外，只能是 11、13、17 或 19。</p>
	17	N-6-2	<p>最大公因數與最小公倍數：質因數分解法與短除法。兩數互質。運用到分數的約分與通分。</p> <p>備註：不做三數的最大公因數與最小公倍數。應包含練習將分數化成最簡分數的問題。</p>
31~40	19	N-6-5	<p>解題：整數、分數、小數的四則應用問題。二到三步驟的應用解題。含使用概數協助解題。</p> <p>備註：含處理分數和小數混合乘除計算之常用技巧。</p>
	23	N-6-7	<p>解題：速度。比和比值的應用。速度的意義。能做單位換算(大單位到小單位)。含不同時間區段的平均速度。含「距離 = 速度 × 時間」公式。用比例思考協助解題。</p> <p>備註：除不同時間區段的平均速度問題外，小學速度問題的假設都是等速運動。含速度固定，時間為幾倍，距離即為幾倍的問題。含時間固定，速度為幾倍，距離即為幾倍的問題。所謂「大單位到小單位」，指的是不論是長度或時間，都只做大單位到小單位的換算。</p>



解題：基準量與比較量。比和比值的應用。含交換基準時之關係。

- 24      N-6-8      備註：所謂交換基準如以哥哥身高為 1，弟弟身高為 $\frac{4}{5}$ ，則以弟弟身高為 1，哥哥身高為 $\frac{5}{4}$ 。

解題：速度。比和比值的應用。速度的意義。能做單位換算(大單位到小單位)。含不同時間區段的平均速度。含「距離 = 速度 × 時間」公式。用比例思考協助解題。

- 25      N-6-7      備註：除不同時間區段的平均速度問題外，小學速度問題的假設都是等速運動。含速度固定，時間為幾倍，距離即為幾倍的問題。含時間固定，速度為幾倍，距離即為幾倍的問題。所謂「大單位到小單位」，指的是不論是長度或時間，都只做大單位到小單位的換算。

21~30

11~20

0~10

表 5-1-2 量與實測學習重點及其答對率之交叉對照表

答對率%	題號	學習重點
91~100		
81~90		
71~80		
		解題：時間的乘除問題。在分數和小數學習的範圍內，解決與時間相關的乘除問題。
61~70	14	N-5-16 備註：含以分數和小數表示的時間量。如 15 分是 $\frac{1}{4}$ 時( $\frac{15}{60} = \frac{1}{4}$ ); $\frac{1}{5}$ 時是 12 分 ( $60 \times \frac{1}{5} = 12$ ) 。可含工程問題。
51~60		
		面積：「公畝」、「公頃」、「平方公里」。生活實例之應用。
41~50	3	N-5-12 含與「平方公尺」的換算與計算。使用概數。 備註：針對量的大單位教學，教師應運用學生熟悉的生活示例，體會各單位的量感。
31~40		
21~30	20	N-5-15 解題：容積。容量、容積和體積間的關係。知道液體體積的意義。 備註：教學中須包含如何以容積的想法求不規則物體的體積。
11~20		
0~10		

表 5-1-3 空間與形狀學習重點及其答對率之交叉對照表

答對率%	題號	學習重點	
91~100			
81~90			
71~80	12	S-6-1	<p>放大與縮小：比例思考的應用。「幾倍放大圖」、「幾倍縮小圖」。知道縮放時，對應角相等，對應邊成比例。</p> <p>備註：知道常見平面圖形的縮放仍然是同一類圖形（含圓），並能說明其原因。</p>
61~70	13	S-6-3	<p>圓周率、圓周長、圓面積、扇形面積：用分割說明圓面積公式。求扇形弧長與面積。知道以下三個比相等：（1）圓心角：360；（2）扇形弧長：圓周長；（3）扇形面積：圓面積，但應用問題只處理用（1）求弧長或面積。</p> <p>備註：由於圓周率取成 3.14，在計算時應以概念理解為原則，避免陷入複雜計算。可利用活動說明一般不規則區域的面積要如何理解和估計，但不評量。扇形面積與弧長只處理直接問題（如已知幾分之幾圓或圓心角求面積或弧長），不處理逆推或過多推理步驟的問題（屬於國中範圍，S-9-5）。</p>
51~60			
41~50	18	S-6-1	<p>放大與縮小：比例思考的應用。「幾倍放大圖」、「幾倍縮小圖」。知道縮放時，對應角相等，對應邊成比例。</p> <p>備註：知道常見平面圖形的縮放仍然是同一類圖形（含圓），並能說明其原因。</p>

31~40	16	S-5-4	<p>線對稱：線對稱的意義。「對稱軸」、「對稱點」、「對稱邊」、「對稱角」。由操作活動知道特殊平面圖形的線對稱性質。利用線對稱做簡單幾何推理。製作或繪製線對稱圖形。</p> <p>備註：從操作活動察覺正三角形、等腰三角形、正方形、長方形、菱形、箏形（箏形指圖形，名詞不出現）、等腰梯形是線對稱圖形（避免告知）。在教學呈現時，線對稱軸應為垂直或平行（操作活動不在此限）。可處理正多邊形。</p>
	21	S-6-2	<p>解題：地圖比例尺。地圖比例尺之意義、記號與應用。地圖上兩邊長的比和實際兩邊長的比相等。</p> <p>備註：含處理兩張地圖之間的長度關係。處理以為「比例分母愈大，相對邊長也愈大」的常見錯誤。</p>
	22	S-6-3	<p>圓周率、圓周長、圓面積、扇形面積：用分割說明圓面積公式。求扇形弧長與面積。知道以下三個比相等：（1）圓心角：360；（2）扇形弧長：圓周長；（3）扇形面積：圓面積，但應用問題只處理用（1）求弧長或面積。</p> <p>備註：由於圓周率取成 3.14，在計算時應以概念理解為原則，避免陷入複雜計算。可利用活動說明一般不規則區域的面積要如何理解和估計，但不評量。扇形面積與弧長只處理直接問題（如已知幾分之幾圓或圓心角求面積或弧長），不處理逆推或過多推理步驟的問題（屬於國中範圍，S-9-5）。</p>
21~30			
11~20			
0~10			

表 5-1-4 關係學習重點及其答對率之交叉對照表

答對率%	題號	學習重點
91~100		
81~90	1	R-6-1
<p>數的計算規律：小學最後應認識 ( 1 ) 整數、小數、分數都是數，享有一樣的計算規律。( 2 ) 整數乘除計算及規律，因分數運算更容易理解。( 3 ) 逐漸體會乘法和除法的計算實為一體。併入其他教學活動。</p> <p>備註：須理解小數和分數乘除混合計算時，常用的約分規則。在生活解題上，乘法和除法意義不同，但在計算上兩者實為一體，學生因此可提高數學認識之抽象層次。乘法和除法視為一體的好處是計算規律大為簡化。本條目不須另立獨立單元教學。</p>		
71~80		
61~70	6	R-6-1
	<p>數的計算規律：小學最後應認識 ( 1 ) 整數、小數、分數都是數，享有一樣的計算規律。( 2 ) 整數乘除計算及規律，因分數運算更容易理解。( 3 ) 逐漸體會乘法和除法的計算實為一體。併入其他教學活動。</p> <p>備註：須理解小數和分數乘除混合計算時，常用的約分規則。在生活解題上，乘法和除法意義不同，但在計算上兩者實為一體，學生因此可提高數學認識之抽象層次。乘法和除法視為一體的好處是計算規律大為簡化。本條目不須另立獨立單元教學。</p>	
	11	R-6-3
	<p>數量關係的表示：代數與函數的前置經驗。將具體情境或模式中的數量關係，學習以文字或符號列出數量關係的關係式。</p> <p>備註：數量關係的表示例如：晝長夜長的關係可列成晝長+夜長=24。連結 R-6-2。含部分運用符號的教學，連結國中「符號代表數」或「未知數」教學，其教學重點在「關係的表示」，而非抽象的「代數符號演算」。</p>	

51~60	5	R-6-4 (同 N-6-9)	<p>解題：由問題中的數量關係，列出恰當的算式解題。可包含( 1 ) 較複雜的模式( 如座位排列模式 )；( 2 ) 較複雜的計數：乘法原理、加法原理或其混合；( 3 ) 較複雜之情境：如年齡問題、流水問題、和差問題、雞兔問題。連結 R-6-2、R-6-3。</p> <p>備註：複雜解題旨在思考，不要求步驟的併式。其他見 N-6-9 備註。</p>
41~50			
31~40			
21~30			
11~20			
0~10			

## 陸、整體教學建議

### 一、學生整體表現

由表 6-1 觀之，本次測驗全體學生的平均通過率是 54%。從學生在各評量指標-知識向度與認知向度的解題表現來看，其中，在知識向度方面，學生在關係向度的平均通過率最高 ( 67% )，其次是數與計算向度 ( 55% )、空間與形狀向度 ( 49% )，在量與實測向度的平均通過率最低 ( 46% )；在認知向度方面，學生在程序執行向度的平均通過率最高 ( 58% )，在解題思考向度平均通過率最低 ( 50% )。進一步分析資料，學生在關係\*概念理解向度的平均通過率最佳 ( 全：90%，高分組：99%，低分組：73% )；學生在量與實測\*解題思考向度的平均通過率最低 ( 全：30%，高分組：41%，低分組：20% )。

此結果顯示針對六年級學生的數學課室教學，教師應強化學生在數與計算部分有關因倍數、質數、分小數及基準量、比較量等概念的掌握與解題思考的能力；在量與實測部分應多協助學生理解並熟練大單位的概念及單位換算，以及強化利用容量、容積和體積之間關係解題的能力；空間與形狀部分，應協助學生理解圓周率、圓周長、圓面積、扇形面積的關係及線對稱、放大縮小的性質及相關運算，並能運用比例尺的概念進行問題解決。

表 6-1 整體學生及高分組、低分組學生於各評量向度之通過率

六	概念理解			程序執行			解題思考			整體		
	題號	分組	通過率	題號	分組	通過率	題號	分組	通過率	題數	分組	通過率
數與 計算	07、09、 10、15、 17、23、 24	高	0.78	02、 04	高	0.93	08、 19、 25	高	0.74	共 12 題	高	0.79
		全	0.53		全	0.71		全	0.48		全	0.55
		低	0.29		低	0.40		低	0.26		低	0.30
量與 實測	14	高	0.91	03	高	0.70	20	高	0.41	共 3 題	高	0.67
		全	0.64		全	0.44		全	0.30		全	0.46
		低	0.31		低	0.23		低	0.20		低	0.25

六	概念理解			程序執行			解題思考			整體		
	題號	分組	通過率	題號	分組	通過率	題號	分組	通過率	題數	分組	通過率
空間 與形 狀	13、16、 22	高	0.69	18	高	0.72	12、21	高	0.77	共 6 題	高	0.72
		全	0.46		全	0.45		全	0.55		全	0.49
		低	0.28		低	0.26		低	0.33		低	0.29
關係	01	高	0.99	05、06	高	0.85	11	高	0.91	共 4 題	高	0.90
		全	0.90		全	0.57		全	0.65		全	0.67
		低	0.73		低	0.30		低	0.33		低	0.41
整體	共 12 題	高	0.78	共 6 題	高	0.83	共 7 題	高	0.73	共 25 題	高	0.78
		全	0.55		全	0.58		全	0.50		全	0.54
		低	0.33		低	0.31		低	0.28		低	0.31



## 二、對學習待加強學生的觀察

本次測驗對象是國小六年級的學生，測驗的內容是以十二年國民基本教育課程綱要國民中小學暨普通型高級中等學校-數學領域中所羅列之六年級學生應學習的分年細目作為命題依據。因此，高、低分組學生在這些題目的答對率上應相距不遠；但是，由上表 6-1 呈現的數據發現，有些題目高分組學生與低分組學生的通過率落差很大。因此，我們特別針對鑑別度較高的試題（第 7、14、11、5、4 題）再做進一步的分析與討論，提供老師作為教學上的參考。

### (一) 短除法求最大公因數和最小公倍數

#### 1. 評量目標

第 7 題（試題如下）對應的學習內容是「N-6-2 最大公因數與最小公倍數：質因數分解法與短除法。兩數互質。運用到分數的約分與通分。備註：不做三數的最大公因數與最小公倍數。應包含練習將分數化成最簡分數的問題。」

下面是用短除法求 30 和  $A$  最大公因數或最小公倍數的計算過程，且  $C$  和 6 兩數互質。

$$\begin{array}{r|l} 2 & 30 \ A \\ \hline B & 15 \ 18 \\ \hline C & 6 \end{array}$$

下列敘述何者錯誤？

- ① 30 和  $A$  的最大公因數是  $2 \times B$
- ② 30 和  $A$  的最小公因數是 1
- ③ 30 和  $A$  的最大公倍數是  $30 \times A$
- ④ 30 和  $A$  的最小公倍數是  $2 \times B \times C \times 6$

本題給定用短除法求兩數最大公因數及最小公倍數的計算過程，要求學生選出錯誤的敘述，評量學生利用短除法求最大公因數與最小公倍數的能力。

教師應先引入質因數分解法求兩數的最大公因數，再透過質因數分解法，引入短除法求兩數的最大公因數；相同的想法，教師也要先引入質因數分解法求兩數的最小公倍數，再透過質因數分解法，引入短除法求兩數的最小公倍數。

教師也應幫助學生理解公因數是最大公因數的因數，公倍數是最小公倍數的倍數。利用短除法解題時，只能求出最大公因數，無法求出所有的公因數。利用短除法解題時，只能求出最小公倍數，無法求出其它的公倍數。

## 2. 試題分析

- (1) 本題鑑別度為0.61，正確答案為選項③，通過率為57%，顯示近六成的學生已具備利用短除法求最大公因數與最小公倍數的能力。
- (2) 有11%的學生選擇①（低分組有21%），這些學生可能不具備利用短除法求最大公因數與最小公倍數的能力；這些學生可能不知道兩數的最小公因數是1；也不知道不存在兩數的最大公倍數。
- (3) 有20%的學生選擇②（低分組有32%），這些學生可能不具備利用短除法求最大公因數與最小公倍數的能力；這些學生也能誤解題意，選擇正確的敘述。
- (4) 有11%的學生選擇④（低分組有21%），這些學生可能不具備利用短除法求最大公因數與最小公倍數的能力；這些學生可能不知道兩數的最小公因數是1；也不知道不存在兩數的最大公倍數。。

## 3. 教學建議

依據分析結果，教學建議如下：

- (1) 以「找出18和24的最大公因數」為例，說明如何利用質因數分解法求兩數的最大公因數。

步驟一：先將18及24進行質因數分解： $18 = 2 \times 3 \times 3$ ； $24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$

步驟二：教師提供18和24的所有因數(以質因數分解算式呈現)。

18的因數：1、2、3、 $2 \times 3$ 、 $3 \times 3$ 、 $2 \times 3 \times 3$

24的因數：1、2、3、 $2 \times 2$ 、 $2 \times 3$ 、 $2 \times 2 \times 2$ 、 $2 \times 2 \times 3$ 、 $2 \times 2 \times 2 \times 3$

步驟三：幫助學生找出公因數1、2、3、 $2 \times 3$ ，以及最大公因數 $2 \times 3$ 。

步驟四：要求學生觀察最大公因數 $2 \times 3$ ，和18及24質因數分解的算式：

$$\begin{aligned} 18 &= \boxed{2 \times 3} \times 3 \\ 24 &= 2 \times 2 \times \boxed{2 \times 3} \end{aligned}$$

幫助學生理解最大公因數 $2 \times 3$ 是18和24共同質因數的乘積。

步驟五：給定18及24質因數分解的算式，要求學生直接找出18及24的最大公因數。

(2) 以「找出18和24的最大公因數」為例，說明如何利用短除法求兩數的最大公因數。

步驟一：複習質因數分解法求兩數的最大公因數，18和24的最大公因數 $2 \times 3$ 是共同質因數的乘積。

$$\text{步驟二：} \begin{array}{r|rr} 2 & 18 & 24 \\ \hline & 9 & 12 \end{array}$$

2是18和24共同的質因數，提出質因數2，得到 $18 = 2 \times 9$ ， $24 = 2 \times 12$ 。

$$\text{步驟三：} \begin{array}{r|rr} 2 & 18 & 24 \\ 3 & 9 & 12 \\ \hline & 3 & 4 \end{array}$$

3也是18和24共同的質因數，提出質因數3，

得到 $18 = (2 \times 3) \times 3$ ， $24 = (2 \times 3) \times 4$ 。

步驟四：3和4互質，沒有共同的質因數。

步驟五：共同質因數的乘積是 $2 \times 3$ ， $2 \times 3$ 是18和24的最大公因數。

(3) 以「找出18和24的最小公倍數」為例，說明如何利用質因數分解法求兩數的最小公倍數。

步驟一：複習活動，先列出部分24的倍數，再由小至大逐一判斷這些數是否也是18的倍數。

24的倍數：24，48，72，96，120，144，168，192

72，144是18的倍數，72是最小公倍數。

步驟二：先將18及24進行質因數分解：

$$\begin{aligned} 18 &= 2 \times 3 \times 3 \\ 24 &= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \end{aligned}$$

步驟三：教師指著24質因數分解的算式，說明「 $2 \times 2 \times 2 \times 3$ 」只要再乘以「3」，就會是18的倍數，所以18和24的最小公倍數是「 $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$ 」。

教師再指著18質因數分解的算式，說明「 $2 \times 3 \times 3$ 」只要再乘以「 $2 \times 2$ 」，就會是24的倍數，所以24和18的最小公倍數是「 $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$ 」。

步驟四：說明這兩種方法算出來的最小公倍數都是「 $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$ 」。

步驟五：要求學生觀察最小公倍數「 $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$ 」，和18及24質因數分解的算式：

$$18 = 2 \times 3 \times 3$$

$$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$$

幫助學生理解最小公倍數 $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$ 是18和24「共同質因數乘積 $2 \times 3$ 」和「剩下質因數乘積 $2 \times 2 \times 3$ 」的乘積。

步驟六：給定18及24質因數分解的算式，要求學生直接找出18及24的最小公倍數。

(4) 以「找出18和24的最小公倍數」為例，說明如何利用短除法求兩數的最小公倍數。

步驟一：複習質因數分解法求兩數的最小公倍數，18和24的最小公倍數

「 $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$ 」是「共同質因數乘積 $2 \times 3$ 」和「剩下質因數乘積 $2 \times 2 \times 3$ 」的乘積。

$$\text{步驟二：} \begin{array}{r|rr} 2 & 18 & 24 \\ \hline & 9 & 12 \end{array}$$

2是18和24共同的質因數，提出質因數2，得到 $18 = 2 \times 9$ ， $24 = 2 \times 12$ 。

$$\text{步驟三：} \begin{array}{r|rr} 2 & 18 & 24 \\ 3 & 9 & 12 \\ \hline & 3 & 4 \end{array}$$

3也是18和24共同的質因數，提出質因數3，

得到 $18 = (2 \times 3) \times 3$ ， $24 = (2 \times 3) \times 4$

步驟四：3和4互質，沒有共同的質因數。

步驟五：幫助學生認識下面的4可以質因數分解成 $2 \times 2$ 。

「共同質因數的乘積 $2 \times 3$ 」，是短除法左邊兩個質因數的乘積。

「剩下質因數乘積 $3 \times 2 \times 2 = 3 \times 4$ 」，是短除法下面兩數的乘積。

步驟六：最小公倍數是「共同質因數乘積」和「剩下質因數乘積」的乘積，只要將左邊的質因數2、3，和下面的數字3、4相乘，就能得到最小公倍數 =  $(2 \times 3) \times (3 \times 4)$ 。

## (二) 工程問題

### 1. 評量目標

第 14 題 ( 試題如下 ) 對應的學習內容是「N-5-16 解題：時間的乘除問題。在分數和小數學習的範圍內，解決與時間相關的乘除問題。備註：含以分數和小數表示的時間量。如 15 分是  $\frac{1}{4}$  時 (  $\frac{15}{60} = \frac{1}{4}$  );  $\frac{1}{5}$  時是 12 分 (  $60 \times \frac{1}{5} = 12$  )。可含工程問題。」

有 120 箱新書，只用大推車搬運，要 10 趟才能搬完，  
只用小推車搬運，要 15 趟才能搬完。  
如果一趟用大推車和小推車各 1 輛一起搬運，至少要多少趟才能搬完？

- ① 5
- ② 6
- ③ 8
- ④ 12

本題給定待運量及大、小兩推車搬運的次數，要求學生算出大小兩推車一起搬運的次數，評量學生工程問題解題的能力。

學習內容 N-5-16 的教學重點是時間的乘除問題，以及時間量小數倍和分數倍的化聚問題，108 課綱增加了工程問題，下面先說明工程問題的解題活動，在教學建議部分會說明如何幫助學生解決時間的乘除問題，以及時間量小數倍和分數倍的化聚問題。

以本題為例，教師們熟悉的題型是「大推車搬運要 10 趟才能幫搬完，小推車搬運要 15 趟才能幫搬完，大推車和小推車各一輛一起搬運，要多少次才能搬完？」，教師熟悉的題型都不會提供搬運物件的個數，因此我們都假設搬運的物件為「1」，學生應該不理解為何要假設搬運的物件為「1」。

下面說明為何我們會假設搬運的物件為「1」，以及五年級引入工程問題時應注意的事項。

如果不給搬運物件的個數，我們都假設搬運的物件為 1，下面提出假設搬運的物件為 1，以及搬運物件為 120 個，60 個及 10 個的解題方法。

搬運物件為 120 個： $120 \div 10 = 12$ ， $120 \div 15 = 8$ ， $120 \div (12 + 8) = 6$

搬運物件為 60 個： $60 \div 10 = 6$ ， $60 \div 15 = 4$ ， $60 \div (6 + 4) = 6$

$$\text{搬運物件為 10 個：} 10 \div 10 = 1, 10 \div 15 = \frac{2}{3}, 10 \div (1 + \frac{2}{3}) = 6$$

$$\text{搬運物件為 1：} 1 \div 10 = \frac{1}{10}, 1 \div 15 = \frac{1}{15}, 1 \div (\frac{1}{10} + \frac{1}{15}) = 6$$

因為不論搬運物件的個數是多少個，算出來的答案都相同，因此數學上習慣假設搬運的物件為「1」，由上面的解題過程教師可以知道，搬運物件為10個及假設搬運物件為1的計算過程都涉及分數除法計算，而分數除法計算六年級才引入。

因此五年級的工程問題，教師必須提供搬運物件的個數，而且搬運物件的個數，必須是搬運次數的整數倍，學生才有能力解題。

## 2. 試題分析

- (1) 本題鑑別度為0.6，正確答案為選項②，通過率為64%，顯示超過六成的學生已具備解決給定搬運量工程問題解題的能力。
- (2) 有17%的學生選擇①（低分組有28%），這些學生可能尚未具備解決給定搬運量工程問題解題的能力，這些學生利用平分的想法，透過 $120 \div (10 + 15) = 4.8$ ， $4.8 \approx 5$ ，算出至少要5趟。
- (3) 有11%的學生選擇③（低分組有23%），這些學生可能尚未具備解決給定搬運量工程問題解題的能力，這些學生利用平分的想法，透過 $120 \div 15 = 8$ ，算出至少要8趟。
- (4) 有8%的學生選擇④（低分組有17%），這些學生可能尚未具備解決給定搬運量工程問題解題的能力，這些學生利用平分的想法，透過 $120 \div 10 = 12$ ，算出至少要12趟。

## 3. 教學建議

依據分析結果，教學建議如下：

- (1) 以 $\frac{2}{5}$ 小時 = ( )分鐘為例，提出二種幫助學生解題的方法。

方法一：單位量轉換

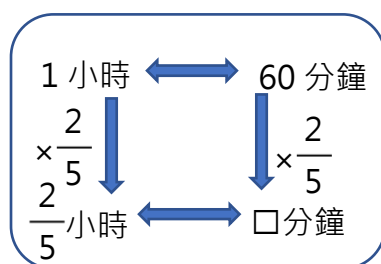
$$\frac{2}{5} \text{ 小時是 } \frac{2}{5} \text{ 個 1 小時}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{5} \text{ 小時是 } \frac{2}{5} \text{ 個 } 60 \text{ 分鐘 (1 小時 = 60 分鐘)}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{5} \text{ 小時是 } 60 \text{ 分鐘的 } \frac{2}{5} \text{ 倍 ( 可以記成 } 60 \times \frac{2}{5} \text{ )}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{5} \text{ 小時是 } 24 \text{ 分鐘 ( } 60 \times \frac{2}{5} = 24 \text{ )}$$

方法二：透過比的想法，利用關係式來解題



$$60 \times \frac{2}{5} = 24, \text{ 所以 } \frac{2}{5} \text{ 小時} = 24 \text{ 分鐘}$$

(2) 以12分鐘 = ( ) 小時為例，說明如何幫助學生解題。

方法一：單位量轉換

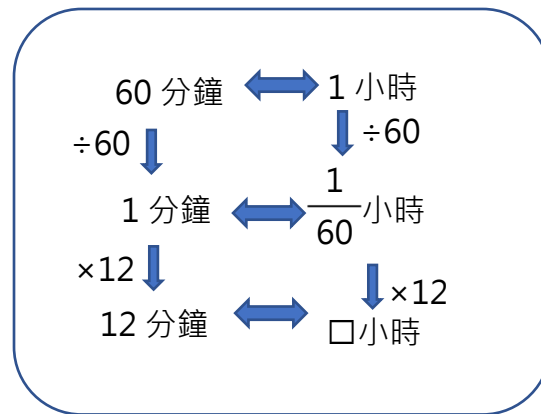
12分鐘是12個1分鐘

$$\Rightarrow 12 \text{ 分鐘是 } 12 \text{ 個 } \frac{1}{60} \text{ 小時 ( } 1 \text{ 分鐘} = \frac{1}{60} \text{ 小時 )}$$

$$\Rightarrow 12 \text{ 分鐘是 } \frac{1}{60} \text{ 小時的 } 12 \text{ 倍 ( 可以記成 } \frac{1}{60} \times 12 \text{ )}$$

$$\Rightarrow 12 \text{ 分鐘是 } \frac{1}{5} \text{ 小時 ( } \frac{1}{60} \times 12 = \frac{1}{5} \text{ )}$$

方法二：透過比的想法，利用關係式來解題



$$\frac{1}{60} \times 12 = \frac{1}{5}, \text{ 所以 } 12 \text{ 分鐘} = \frac{1}{5} \text{ 小時}$$

(3) 以「小明每天長跑時間是1小時30分鐘，連續7天，共跑多少小時多少分鐘？」為例，說明如何幫助學生解題。

步驟一：先複習時間單位的化聚關係，1小時 = 60分鐘，60分鐘 = 1小時。

步驟二：溝通利用時間複名數乘法直式算則解題時，最後答案的分鐘數字不能比60大。

步驟三：利用直式算出答案10小時30分鐘。

小時	分鐘	
1	30	
×	7	
7		
+	3 30	分鐘的數字不能比60大
10 30		210分鐘聚成3小時30分鐘
10 30		答案是10小時30分鐘

(4) 以等分除情境時間量問題「13日9小時48分鐘 $\div 4 = ( )$ 日 $( )$ 小時 $( )$ 分鐘」為例，提出兩種幫助學生解題的方法：

方法一：被除數換成單名數（都換成分鐘）策略：

$$1 \text{ 小時} = 60 \text{ 分鐘} ; 1 \text{ 日} = 24 \text{ 小時} = 1440 \text{ 分鐘}$$

$$13 \text{ 日 } 9 \text{ 小時 } 48 \text{ 分鐘} = 19308 \text{ 分鐘} \quad (1440 \times 13 + 60 \times 9 + 48 = 19308)$$

$$19308 \div 4 = 4827 \text{ (分鐘)} , 4827 \text{ 分鐘} = 3 \text{ 日 } 8 \text{ 小時 } 27 \text{ 分鐘}$$



方法二：將被除數視為多單位估商策略：

	日	小時	分鐘
	3	8	27
4	13	9	48
	-12	+24	+60
	1	33	108
		-32	108
		1	0

1 日 = 24 小時

1 小時 = 60 分鐘

(5) 以包含除情境時間量問題「機器完成一件成品要3日8小時50分鐘，14日19小時15分鐘最多可完成幾件成品，剩下多少時間？」為例，提出兩種幫助學生解題的方法：

方法一：被除數和除數都換成「幾分鐘」策略

$$24 \times 3 = 72 \cdot 72 + 8 = 80 \text{ (小時)}$$

$$60 \times 80 = 4800 \cdot 4800 + 50 = 4850 \text{ (分鐘)}$$

$$24 \times 14 = 336 \cdot 336 + 19 = 355 \text{ (小時)}$$

$$60 \times 355 = 21300 \cdot 21300 + 15 = 21315 \text{ (分鐘)}$$

$$21315 \div 4850 = 4 \text{ (件)} \dots 1915 \text{ (分鐘)}$$

$$1915 \div 60 = 31 \text{ (小時)} \dots 55 \text{ (分鐘)}$$

$$31 \div 24 = 1 \text{ (日)} \dots 7 \text{ (小時)}$$

答：最多可以完成4件成品，剩下1日7小時55分鐘。

方法二：先乘後減策略：

$$3 \text{ 日 } 8 \text{ 小時 } 50 \text{ 分鐘} \times 4 = 13 \text{ 日 } 11 \text{ 小時 } 20 \text{ 分鐘}$$

$$14 \text{ 日 } 19 \text{ 小時 } 15 \text{ 分鐘} - 13 \text{ 日 } 11 \text{ 小時 } 20 \text{ 分鐘} = 1 \text{ 日 } 7 \text{ 小時 } 55 \text{ 分鐘}$$

	日	小時	分鐘
	3	8	50
×			4
	<del>12</del>	<del>32</del>	<del>200</del>
	13	11	20

	日	小時	分鐘
	14	19	15
-	13	11	20
	1	7	55

答：最多可以完成4件成品，剩下1日7小時55分。

### (三) 數量關係的表示

#### 1. 評量目標

第 11 題 ( 試題如下 ) 對應的學習內容是「R-6-3 數量關係的表示：代數與函數的前置經驗。將具體情境或模式中的數量關係，學習以文字或符號列出數量關係的關係式。備註：數量關係的表示例如：晝長夜長的關係可列成晝長+夜長=24。連結 R-6-2。含部分運用符號的教學，連結國中『符號代表數』或『未知數』教學，其教學重點在『關係的表示』，而非抽象的『代數符號演算』。」

下圖是火車座位的配置圖。

		走 道	WC	
42	44		43	41
38	40		39	37
34	36		35	33
30	32		31	29
C	A		D	E
	B			F

根據上圖，下列敘述何者正確？

- ①  $A - B = 2$
- ②  $A + C = 2$
- ③  $D + 2 = E$
- ④  $F + 4 = E$

本題給定含有數字和符號標示的火車座位圖，要求學生選出正確的算式，評量學生利用數字及符號列出數量關係式的能力。

本題給定的 A、B、C、D、E、F 都是符號，這些符號都只代表一個數字，是最簡單符號代表數的問題情境，學生只要具備二維數量模式的觀察與推理的能力(四年級教材)，完成火車座位配置圖，就能得到 A 位置的數字是 28、B 位置的數字是 24、C 位置的數字是 26、D 位置的數字是 27、E 位置的數字是 25、F 位置的數字是 21，將數字帶入選項中的符號，就能得到只有選項④正確。

## 2. 試題分析

- (1) 本題鑑別度為0.58，正確答案為選項④，通過率為65%，顯示六成五的學生已具備利用數字及符號列出數量關係式的能力。
- (2) 有10%的學生選擇①(低分組有20%)，這些學生可能未具備利用數字及符號列出數量關係式的能力；這些學生也可能不具備二維數量模式的觀察與推理的能力(四年級教材)。

(3) 有11%的學生選擇②( 低分組有23% )，這些學生可能未具備利用數字及符號列出數量關係式的能力；這些學生也可能不具備二維數量模式的觀察與推理的能力( 四年級教材 )。

(4) 有14%的學生選擇③( 低分組有24% )，這些學生可能未具備利用數字及符號列出數量關係式的能力；這些學生也可能不具備二維數量模式的觀察與推理的能力( 四年級教材 )。

### 3. 教學建議

依據分析結果，教學建議如下：

(1) 數量關係的表示是代數與函數的前置經驗，因為方程式和函數都是因為要描述某種問題中的數量關係而建立的。

(2) 在四、五年級，學生已經學習過某些數量關係的公式表示，教師可鼓勵學生自己將發現的規律表示出來，因此引導的問題應盡量容易。例如晝長和夜長的總和是24時。因此可表示成「日+夜=24」、「白天+晚上=24」、「晝長+夜長=24」、「 $W+B=24$ 」，重點在於學生用自己的語言去描述這樣的規律，並能運用於解題。

(3) 教師可選擇部分課題，進行運用「符號表示公式」的教學，這比用「文字表示公式」抽象，但也更接近國中代數用「符號代表數」或「未知數」的教學。教學或活動時，教師務必與學生清楚約定符號的意義( 就像面積教學時，符號可以清楚出現在圖中 )。

(4) 表示公式時，不必在意符號數目的多寡，一切以「清楚表示數量關係」為原則，這裡不是進行多變數的方程式教學，教師尤其不要進行抽象的「代數符號演算」。

## (四) 由問題中的數量關係，列出恰當的算式解題

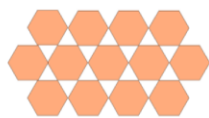
### 1. 評量目標

第5題( 試題如下 ) 對應的學習內容是「R-6-4 ( 同 N-6-9 ) 解題：由問題中的數量關係，列出恰當的算式解題。可包含( 1 )較複雜的模式( 如座位排列模式 )；( 2 )較複雜的計數：乘法原理、加法原理或其混合；( 3 )較複雜之情境：如年齡問題、流水問題、和差問題、雞兔問題。連結 R-6-2、R-6-3。備註：複雜解題旨在思考，不要求步驟的併式。其他見 N-6-9 備註。」

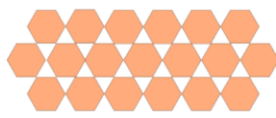
用相同大小的正六邊形按照下面的方式排圖形。



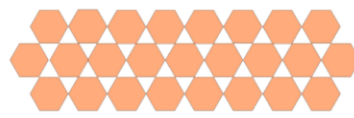
【圖一】



【圖二】



【圖三】



【圖四】

請問第 29 個圖會用到幾個正六邊形？

- ① 174
- ② 175
- ③ 181
- ④ 187

本題給定由正六邊形規律排列的前 4 個圖形，要求學生推算出第 29 個圖形中正六邊形的個數，評量學生是否具備由問題中的數量關係列出恰當算式解題的能力。

國小三年級、國小六年級及國中二年級都有這類問題，他們的教學重點不一樣。三年級的教學重點是一維數量模式的觀察與推理，學生只要能畫出圖 5，並說明理由即可；國小六年級的教學重點是利用變數的想法，找出第 29 個圖形的個數，例如圖 1 有 7 個正六邊形，圖 2 比圖 1 多 6 個正六邊形，圖 2 中正六邊形的個數可以記成  $7 + 6 \times 1$ ，圖 3 比圖 2 多 6 個正六邊形，圖 3 中正六邊形的個數可以記成  $7 + 6 \times 2$ ，圖 4 比圖 3 多 6 個正六邊形，圖 4 中正六邊形的個數可以記成  $7 + 6 \times 3$ ，期望學生可以看到規律，先推導出圖 5 中正六邊形的個數可以記成  $7 + 6 \times 4$ ，進而推導出圖 29 中正六邊形的個數可以記成  $7 + 6 \times 28$ ；國中的教學重點是利用變數來表示一般項，可以用「 $7 + 6 \times (n - 1)$ ， $n = 1、2、3、……$ 」來表示所有圖形中正六邊形的個數。

## 2. 試題分析

- (1) 本題鑑別度為 0.57，正確答案為選項②，通過率為 51%，顯超過五成的學生已具備由問題中的數量關係列出恰當算式解題的能力。
- (2) 有 25% 的學生選擇① (低分組有 39%)，這些學生可能尚未具備由問題中的數量關係列出恰當算式解題的能力。
- (3) 有 17% 的學生選擇③ (低分組有 21%)，這些學生可能尚未具備由問題中的數量關係列出恰當算式解題的能力，誤用  $7 + 6 \times 29 = 181$  解題。

(4) 有7%的學生選擇④ ( 低分組有15% )，這些學生可能尚未具備由問題中的數量關係列出恰當算式解題的能力，誤用 $7+6\times 30=187$ 解題。

### 3. 教學建議

依據分析結果，教學建議如下：

建議教師透過下列方式幫助學生解題：

步驟一：教師可以先要求學生列出圖1到圖4中正六邊形的個數，例如圖1中有7個正六邊形，圖2中有13個正六邊形，圖3中有19個正六邊形，圖4中有25個正六邊形，接著要求學生說明這些數字有什麼規律。

學生應該可以看到後一項的數字都比前一項的數字多6。

步驟二：教師可以要求學生找出圖5或圖6中正六邊形的個數，學生應該有能力透過 $25+6=31$ ， $31+6=37$ ，找到圖5中正六邊形的個數是31個，圖6中正六邊形的個數是37個。

步驟三：教師可以要求學生找出圖29或圖100中正六邊形的個數，學生應該可以察覺要加太多次的6太麻煩，對解題沒有幫助。

步驟四：教師可以提示學生，圖1有7個正六邊形，圖2比圖1多6個正六邊形，也就是多1個6，圖3比圖1多12個正六邊形，也就是多2個6，.....，幫助學生將注意力放在圖幾和多幾個6上面。

步驟五：幫助學生列出下面的算式

圖1  $\Rightarrow$  7個

圖2  $\Rightarrow 7+6\times 1$ 個

圖3  $\Rightarrow 7+6\times 2$ 個

圖4  $\Rightarrow 7+6\times 3$ 個

步驟六：學生應該能察覺變化的關係，推導出

圖5  $\Rightarrow 7+6\times 4$ 個

圖6  $\Rightarrow 7+6\times 5$ 個

.....

圖29  $\Rightarrow 7+6\times 28$ 個

## (五) 除數是小數的除法直式計算

### 1. 評量目標

第 4 題 ( 試題如下 ) 對應的學習內容是「N-6-4 小數的除法：整數除以小數、小數除以小數的意義。直式計算。教師用位值的概念說明直式計算的合理性。處理商一定比被除數小的錯誤類型。備註：可不處理餘數問題，若要處理，限於具體合理的生活情境，商限定為整數，並小心在直式計算中處理餘數問題。餘數問題不評量。」

爸爸到加油站加了 32.8 公升的 95 無鉛汽油，花了 1025 元。  
請問當天 1 公升 95 無鉛汽油的售價是多少元？

- ① 0.032
- ② 3.04
- ③ 30.4
- ④ 31.25

本題給定加油的公升數及金額，要求學生算出 1 公升的售價，評量學生利用小數除法直式計算解題的能力。

除數是小數的包含除問題包含有餘數和沒有餘數兩種題型：

有餘數的問題：緞帶長 29.4 公尺，每 1.8 公尺做一朵花，最多可以做成幾朵花？

剩下幾公尺？

沒有餘數的問題：緞帶長 29.4 公尺，每 1.8 公尺做一朵花，全部做完，相當於做成多少朵花？

學習內容 N-6-4 限制討論有餘數的包含除問題時，商都必須是整數，但是不可以評量餘數。討論沒有餘數的包含除問題時，商必須能除盡，且商最多是三位小數。

### 2. 試題分析

- (1) 本題鑑別度為 0.56，正確答案為選項④，通過率為 69%，顯示近七成的學生已具備利用小數除法直式計算解題的能力。
- (2) 有 10% 的學生選擇① ( 低分組有 16% )，這些學生可能不具備利用小數除法直式計算解題的能力；這些學生也可能已具備利用小數除法直式計算解題的能力，但是誤解題意，使用 32.8 公升除以 1025 元來解題。

(3) 有10%的學生選擇②( 低分組有24% )，這些學生可能不具備利用小數除法直式計算解題的能力。

(4) 有11%的學生選擇③( 低分組有23% )，這些學生可能不具備利用小數除法直式計算解題的能力。

### 3. 教學建議

依據分析結果，教學建議如下：

(1) 建議教師先在整數情境的問題中，說明「被除數和除數同時換單位」解題策略的意義後，再引入小數情境的問題。

先以「14000元，每人分3000元，最多可以分給幾人，剩下幾元？」為例，說明「被除數和除數同時換單位」解題策略的意義。

步驟一：先布題「14張1000元鈔票，每人分3張，最多可以分給幾人，剩下幾張1000元鈔票？也就是剩下多少元？」。

$14(\text{張}) \div 3(\text{張}) = 4(\text{人}) \dots 2(\text{張})$ ，得到最多可以分給4個人，剩下2張1000元鈔票，也就是剩下2000元。

步驟二：回到原問題，限制學生先將被除數14000元及除數3000元，都換成1000元後再解題。

14000元換成14張千元，也就是14個千，3000元換成3張千元，也就是3個千。

$14(\text{個千}) \div 3(\text{個千}) = 4(\text{人}) \dots 2(\text{個千})$ ，得到最多可以分給4個人，剩下2個千，也就是剩下2000元。

步驟三：稱這種解題方法為被除數和除數同時換成1000的方法。再命一些題目讓學生練習。

再以「36.2公升果汁，1.4公升裝一瓶，最多裝滿幾瓶，剩下多少公升？」為例，說明如何利用「被除數和除數同時以0.1公升換單位」策略，幫助學生解題。

步驟一：幫助學生將被除數36.2公升及除數1.4公升，同時以0.1公升為單位來換單位。

36.2公升轉換成362個0.1公升，1.4公升換成14個0.1公升。



步驟二：再透過 $362 \div 14 = 25 \dots 12$ ，得到最多可以裝滿25瓶，剩下12個0.1公升，也就是剩下1.2公升。

如果學生無法掌握以0.1公升為單位的意義，教師可以透過命名0.1公升為1杯的方式，將被除數36.2公升及除數1.4公升，轉換成362杯和14杯，再透過 $362 \div 14 = 25 \dots 12$ ，得到最多可以裝滿25瓶，剩下12杯，也就是剩下1.2公升的答案。

- (2) 當商數較小時，例如商數是一位數字時，教師應幫助學生利用「先乘後減」的策略解題。「先乘後減」策略的概念比較簡單，學生不但較易理解其意義，而且也比較有效率。

以「41.57公升果汁，11.4公升裝一瓶，最多裝滿幾瓶，剩下多少公升？」為例，說明如何幫助學生利用「先乘後減」的策略來解題。

步驟一：教師先幫助學生估商，例如11.4公升裝一瓶，可以裝滿3瓶，但是無法裝滿4瓶。

步驟二：裝滿3瓶，共裝了多少公升，還剩下多少公升？

$$11.4 \times 3 = 34.2, 41.57 - 34.2 = 7.37$$

得到最多裝滿3瓶，剩下7.37公升。

當商數是二位數字時，教師也可以幫助學生利用「先乘後減」的策略解題。

以「36.2公升果汁，1.4公升裝一瓶，最多裝滿幾瓶，剩下多少公升？」為例，說明如何幫助學生利用「先乘後減」的策略來解題。

步驟一：教師先幫助學生以10瓶為單位估商，例如1.4公升裝一瓶，可以裝滿20瓶，但是無法裝滿30瓶。

步驟二：裝滿20瓶，共裝了多少公升，還剩下多少公升？

$$1.4 \times 20 = 28, 36.2 - 28 = 8.2$$

得到最多裝滿20瓶，剩下8.2公升。

步驟三：再幫助學生以1瓶為單位估商，例如剩下8.2公升，1.4公升裝一瓶，可以裝滿5瓶，但是無法裝滿6瓶。

步驟四：剩下8.2公升，裝滿5瓶，共裝了多少公升，還剩下多少公升？

$$1.4 \times 5 = 7, 8.2 - 7 = 1.2$$

得到剩下的果汁最多裝滿5瓶，剩下1.2公升。

步驟五：回到原問題，要求學生回答最多裝滿幾瓶，剩下多少公升？

得到最多可以裝滿 25 瓶，剩下 1.2 公升。

## 114 年學力檢測測驗題本 數學六年級

作答注意事項：

各位同學：

你們好。

這是一份數學的試題，總共 25 題。

測驗時間為 40 分鐘。

每一題請選出一個最合適的答案，並用 2B 鉛筆在答案卡畫記，不可超出格線外，如果需要修改答案，請使用橡皮擦擦拭乾淨，再重新畫記。

畫記說明：

當你想選④時，請在「答案卡」該題題號後方把④的圓圈塗黑，如：① ② ③ ●

其他事項：

★ 每一題都要回答。

★ 試題如有錯誤，請立即告知老師。

學 校	
班 級	
座 號	
姓 名	

1. 已經知道  $3\frac{7}{9} \times 8\frac{3}{4} + 8\frac{3}{4} \times 6\frac{2}{3} = \square \times (3\frac{7}{9} + 6\frac{2}{3})$  ,

請問  $\square$  內要填入哪個數？

①  $3\frac{7}{9}$

②  $6\frac{2}{3}$

③  $8\frac{3}{4}$

④  $10\frac{4}{9}$

2. 下表是 5 人份蛋黃酥的食材和重量表。

5 人份蛋黃酥	
食材	重量
蛋黃	適量
高筋麵粉	500 公克
糖	150 公克
紅豆餡	175 公克
低筋麵粉	500 公克

依此配方製作出 2 人份的蛋黃酥，請問紅豆餡需要多少公克？

① 35

② 60

③ 70

④ 350

3. 蘋果園的面積是 15 公頃 8 公畝，芒果園的面積是 123 公畝。  
蘋果園的面積比芒果園的面積大多少公頃多少公畝？

- ① 14 公頃 885 公畝
- ② 13 公頃 885 公畝
- ③ 13 公頃 85 公畝
- ④ 3 公頃 5 公畝

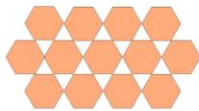
4. 爸爸到加油站加了 32.8 公升的 95 無鉛汽油，花了 1025 元。  
請問當天 1 公升 95 無鉛汽油的售價是多少元？

- ① 0.032
- ② 3.04
- ③ 30.4
- ④ 31.25

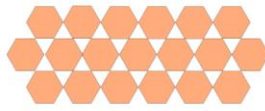
5. 用相同大小的正六邊形按照下面的方式排圖形。



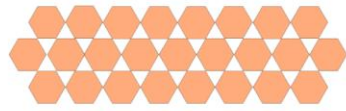
【圖一】



【圖二】



【圖三】



【圖四】

請問第 29 個圖會用到幾個正六邊形？

- ① 174
- ② 175
- ③ 181
- ④ 187

6. 下列哪個等式不成立？

①  $234 \div 7 \div 11 = 234 \times \frac{1}{7} \times \frac{1}{11}$

②  $234 \div 7 \times 11 = 234 \times \frac{7}{11}$

③  $124.8 \times 0.125 \div 5 = 124.8 \times \frac{1}{8} \times \frac{1}{5}$

④  $124.8 \times 0.125 \times 5 = 124.8 \times \frac{5}{8}$

7. 下面是用短除法求 30 和  $A$  最大公因數或最小公倍數的計算過程，且  $C$  和 6 兩數互質。

$$\begin{array}{r|l} 2 & 30 \quad A \\ \hline B & 15 \quad 18 \\ \hline C & 6 \end{array}$$

下列敘述何者錯誤？

① 30 和  $A$  的最大公因數是  $2 \times B$

② 30 和  $A$  的最小公因數是 1

③ 30 和  $A$  的最大公倍數是  $30 \times A$

④ 30 和  $A$  的最小公倍數是  $2 \times B \times C \times 6$

8. 五年甲班上學期有男生 13 人，女生 12 人，男生人數占全班的 52 %。  
這學期轉進 5 位轉學生後，男生人數占全班的 50 %，請問轉入的學生中，  
男生有多少人？

① 1

② 2

③ 3

④ 4

9. 「一根竹竿長  $2\frac{3}{7}$  公尺，全長的  $\frac{2}{5}$  漆上油漆，請問沒有漆上油漆  
部分的長是多少公尺？」下列哪個算式可以算出正確答案？

①  $2\frac{3}{7} \times (1 - \frac{2}{5})$

②  $2\frac{3}{7} \times \frac{2}{5} - 2\frac{3}{7}$

③  $2\frac{3}{7} - 2\frac{3}{7} \div \frac{2}{5}$

④  $(1 - \frac{2}{5}) \div 2\frac{3}{7}$

10. 將 12 公斤的綠豆，每  $\frac{2}{9}$  公斤裝成 1 包，可以裝成 54 包。

如果改成每  $\frac{1}{9}$  公斤裝成 1 包，可以裝成  $a$  包，

改成每  $\frac{6}{9}$  公斤裝成 1 包，可以裝成  $b$  包。

請問  $a$  是  $b$  的多少倍？

①  $\frac{1}{6}$

②  $\frac{2}{27}$

③ 3

④ 6

11. 下圖是火車座位的配置圖。

		走 道	WC	
42	44		43	41
38	40		39	37
34	36		35	33
30	32		31	29
C	A		D	E
	B			F

根據上圖，下列敘述何者正確？

①  $A - B = 2$

②  $A + C = 2$

③  $D + 2 = E$

④  $F + 4 = E$



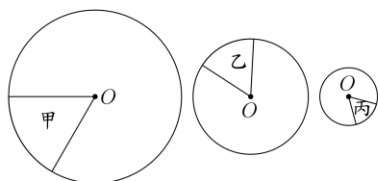
12. 某家造紙廠依照下表製造 M2、M3、M4 等紙張。紙張型號 M2 的尺寸，指的是紙張寬 420 mm，長 600 mm。

紙張型號	紙張尺寸
M2	420 × 600 mm
M3	300 × 420 mm
M4	210 × 300 mm
M5	150 × 210 mm
M6	105 × 150 mm

根據此表，請問哪種型號的紙張是 M4 的 2 倍放大圖？

- ① M2
- ② M3
- ③ M5
- ④ M6

13. 如圖，扇形甲、扇形乙、扇形丙都是  $\frac{1}{6}$  圓。



下列關於甲、乙、丙這三個扇形「扇形弧長：圓周長」比值大小的敘述何者正確？

- ① 扇形甲算出的比值最大
- ② 扇形乙算出的比值最大
- ③ 扇形丙算出的比值最大
- ④ 扇形甲、扇形乙、扇形丙算出的比值都一樣大

14. 有 120 箱新書，只用大推車搬運，要 10 趟才能搬完，  
 只用小推車搬運，要 15 趟才能搬完。  
 如果一趟用大推車和小推車各 1 輛一起搬運，至少要多少趟才能搬完？

- ① 5  
 ② 6  
 ③ 8  
 ④ 12

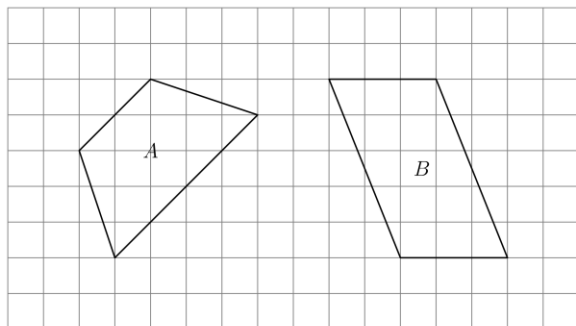
15. 下面是用短除法將整數  $A$  做質因數分解的結果。

$$\begin{array}{r|l}
 7 & A \\
 \hline
 B & 30 \\
 \hline
 D & C \\
 \hline
 & E
 \end{array}$$

下列何者不是  $A$  的因數？

- ①  $B \times D \times E$   
 ②  $C \times D \times E$   
 ③  $7 \times D \times E$   
 ④  $7 \times B \times D \times E$

16. 下列圖形中，哪些圖形是線對稱圖形？



- ① 只有  $A$
- ② 只有  $B$
- ③  $A$  和  $B$  都是
- ④  $A$  和  $B$  都不是

17. 下列是甲、乙、丙三人關於互質的說法。

甲說： $a$  和  $b$  是二個不相等的合數， $a$  和  $b$  一定不會互質。

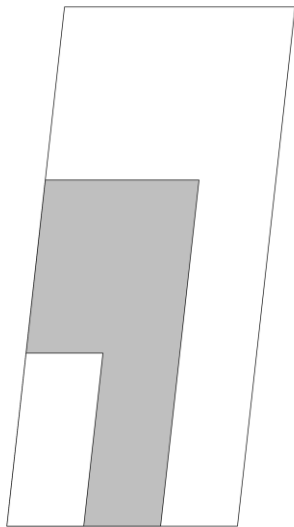
乙說： $a$  和  $b$  兩整數互質時， $a$  和  $b$  的公因數只有 1 個。

丙說： $a$  和  $b$  兩整數互質時， $a \times b$  是  $a$  和  $b$  的最小公倍數。

請問誰的說法錯誤？

- ① 甲
- ② 乙
- ③ 丙
- ④ 三人都正確

18. 四邊形甲是底 20 公分、高 45 公分的平行四邊形，四邊形乙是四邊形甲的 2 倍放大圖，四邊形丙是四邊形甲的 3 倍放大圖。將四邊形丙、四邊形乙和四邊形甲疊合成下圖，請問塗色面積是多少平方公分？



- ① 3600  
 ② 2700  
 ③ 1800  
 ④ 900
19. 已知 600 公克的蒜頭賣 115 元，請問 1 公斤的蒜頭大約多少元？  
 (用四捨五入法將答案取概數到個位)
- ① 5  
 ② 5.2  
 ③ 191  
 ④ 192

20. 溫泉館浴池的底面積為 12 平方公尺，裡面已經注滿一半高度的溫泉水，老闆為了讓泡溫泉的客人在浴池裡可以坐著浸泡，放入了 3 個一樣大小的圓柱石椅，當石椅都沉入溫泉水裡時，水位升高了 30 公分。請問一個圓柱石椅的體積是多少立方公尺？

- ① 120
- ② 3.6
- ③ 1.2
- ④ 0.36

21. 下列有 4 張不同比例尺的中美洲地圖：

A 地圖的比例尺是 1 : 100000 。

B 地圖的比例尺是  $\frac{1}{20000}$  。

C 地圖的比例尺是  。

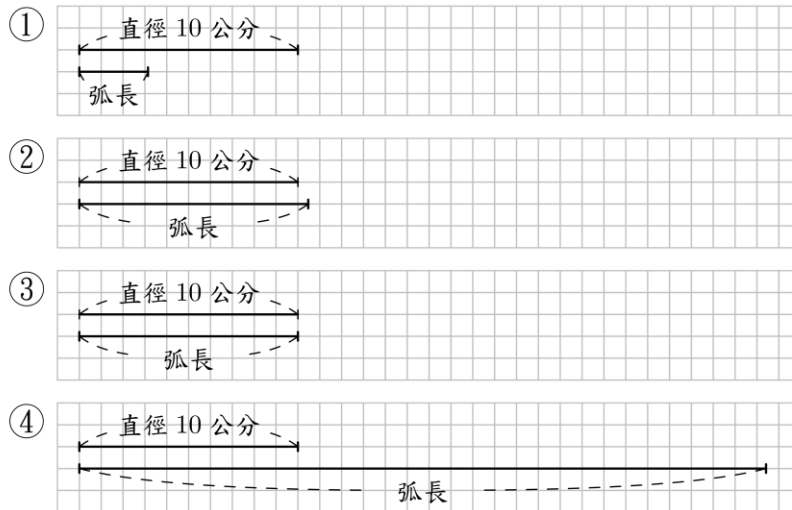
D 地圖的比例尺是  。

巴拿馬運河在中美洲，請問巴拿馬運河在哪張地圖上的長度最短？

- ① A
- ② B
- ③ C
- ④ D

22. 有一個半徑 5 公分的圓和一個半徑 5 公分的  $\frac{1}{3}$  圓。

下列哪個選項是圓的直徑長和  $\frac{1}{3}$  圓的弧長的圖示？



23. 樂樂和恩恩參加 9 公里路跑活動，補給站距離出發點 6 公里，  
兩個人同時從起點出發，同時到達終點。樂樂以分速 100 公尺跑完全程。  
恩恩先以分速 120 公尺從起點跑到補給站；再以分速 75 公尺從補給站  
跑到終點。請問恩恩這次路跑的平均速率是多少公尺/分鐘？

- ① 87.5
- ② 97.5
- ③ 100
- ④ 110

24. 合唱團有 88 個人，女生人數是男生人數的  $\frac{17}{5}$  倍。

請問「男、女生人數差」是「女生人數」的多少倍？

①  $\frac{12}{5}$

②  $\frac{5}{12}$

③  $\frac{17}{12}$

④  $\frac{12}{17}$

25. 爸爸開汽車的時速是 72 公里，請問汽車行駛 5 公尺需要多少秒鐘？

① 0.25

② 2.5

③ 14.4

④ 100